



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

MODELIZACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO DEL SUELO COMPACTADO BAJO UN ESTADO GENERALIZADO DE TENSIONES.

Trabajo realizado por:

Pedro Hernán Alvear Calle

Dirigido por:

Antonio Lloret Morancho

Enrique Romero Morales

Máster en:

Ingeniería del Terreno

Barcelona, junio 2019

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental

TREBALL FINAL DE MÀSTER

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TRABAJO FIN DE MÁSTER EN INGENIERÍA DEL TERRENO

MODELIZACIÓN NUMÉRICA DEL
COMPORTAMIENTO DEL SUELO COMPACTADO
BAJO UN ESTADO GENERALIZADO DE
TENSIONES.

Autor:

PEDRO HERNAN ALVEAR CALLE

DIRECTORES:

ANTONIO LLORET MORANCHO
ENRIQUE ROMERO MORALES

Barcelona, junio de 2019

RESUMEN

En proyectos ingenieriles los suelos compactados tienen una gran influencia. Para estudiar su comportamiento mecánico se debe tomar en cuenta los fenómenos de fluencia, deformaciones irreversibles y dilatación inducida por tensiones de corte, la teoría de la plasticidad abarca todas estas características y describe el comportamiento de suelos y rocas. Se buscó modelos constitutivos capaces de reproducir aspectos del fenómeno de colapso y cuyos parámetros pudieran encontrarse mediante ensayos convencionales de laboratorio.

A finales de los años 60 aparecen las primeras formulaciones de modelos elasto-plásticos de Estado Crítico denominado “Cam-Clay” desarrollado en la Universidad de Cambridge por Roscoe y sus colegas. La elaboración de trabajos experimentales sobre el comportamiento del suelo compactado bajo estado generalizados de tensiones ha sido escasa y las teorías propuestas para modelarlo numéricamente se han basado en una generalización de la teoría de estado crítico (BBM) (Alonso, Gens, & Josa, 1990).

En este trabajo se ha utilizado el modelo Cam-Clay modificado (MCCM) para reproducir ensayos de laboratorio de triaxiales convencionales y el Barcelona Basic Model (BBM) para la interpretación y predicción de ensayos de cilindro hueco con trayectorias del tipo ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$).

Este trabajo está relacionado principalmente con investigación en el área numérica para el estudio del comportamiento mecánico de los suelos saturados, se implementó el modelo (MCCM) para condiciones drenadas y no drenadas y se comprobó su funcionamiento con ensayos de laboratorio realizados en la asignatura de mecánica de suelos de la universidad. Para modelar el comportamiento no saturado, se implementó el modelo BBM, para diferentes cambios tensionales de carga y descarga, con succión controlada, se comprobó su funcionamiento con los ejemplos propuestos en el artículo de (Alonso et al., 1990), se amplió el modelo BBM para un estado tensional generalizado con succión controlada y se comprobó su funcionamiento simulando los resultados obtenidos en la campaña experimental de (Cárdenas, 2018).

El modelo MCCM no reproduce el cambio suave en el desviador cuando la muestra llega a una resistencia pico y luego pasa a una zona de reblandecimiento. Los modelos presentados son adecuados para evaluar el comportamiento de arcillas, por el contrario, en caso de arenas, se precisa de emplear otro modelo constitutivo.

SUMMARY

In engineering projects, compacted soils have a great relevance. In order to study their mechanical behaviour, the phenomena of yielding, irrecoverable strains and expansion induced by shear stresses must be considered. The theory of plasticity covers all these characteristics and describes the behaviour of soils and rocks. Constitutive models capable of reproducing aspects of the collapsing phenomenon and whose parameters could be found by conventional laboratory tests were sought.

At the end of the 60's the first formulations of elasto-plastic models of Critical State called "Cam-Clay" were developed in the University of Cambridge by Roscoe and his colleagues. The elaboration of experimental works on the behaviour of the compacted soil under generalized state of tensions has been scarce and, the theories proposed to model it numerically have been based on a generalization of the theory of critical-critical state (BBM) (Alonso, Gens, & Josa, 1990).

In this work, the modified Cam-Clay model (MCCM) has been used to reproduce conventional triaxial laboratory tests and the Barcelona Basic Model (BBM) for the interpretation and prediction of hollow cylinder triaxial tests with trajectories of the type ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$).

This work is mainly related to research in the numerical area for the study of the mechanical behaviour of unsaturated soils, the model (MCCM) was implemented for drained and undrained conditions, and its operation was verified with laboratory tests carried out in the subject of soil mechanics at the university. To model unsaturated behavior, the BBM model was implemented, for different tension changes of loading and unloading, with controlled suction, its operation was tested with the examples proposed in the article (Alonso et al., 1990), the BBM model was extended for a generalized stress state with controlled suction and its operation was tested simulating the results obtained in the experimental campaign of (Cárdenas, 2018).

The MCCM model does not reproduce the smooth change in deviator stress when the sample reaches a peak strength and then passes to a softening zone. The presented models are suitable to evaluate the behavior of clays, on the contrary, in the case of sand, it is necessary to use another constitutive model.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis Padres, Hernán y Ana
por todo el apoyo que me han brindado
para mi desarrollo profesional con todo el
esfuerzo y sacrificio que han hecho,
a mis hermanos Alexandra y Pablo
quienes me han brindado su apoyo incondicional.

A mis tutores Antonio Lloret y Enrique Romero
por el apoyo durante la realización de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

1.INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. ANTECEDENTES.....	2
1.2. OBJETIVO.....	3
1.3. METODOLOGÍA.....	4
2. ESTADO DEL ARTE.....	6
2.1. SUELOS NO SATURADOS.....	6
2.2. FUNDAMENTOS DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS.....	6
2.3. MODELACIÓN CONSTITUTIVA.....	11
2.3.1. CRITERIO DE ROTURA.....	11
2.3.2. MODELO CAM CLAY MODIFICADO.....	15
2.3.2.1. INTRODUCCIÓN.....	15
2.3.2.2. FUNDAMENTO TEÓRICO.....	15
2.3.2.3. PROPIEDADES ELASTICAS.....	16
2.3.2.4. SUPERFICIE DE FLUENCIA.....	16
2.3.2.5. POTENCIAL PLASTICO.....	17
2.3.2.6. LEY DE ENDURECIMIENTO.....	17
2.3.3. MODELO BASICO DE BARCELONA (BBM).....	18
2.3.3.1. INTRODUCCION.....	18
2.3.3.2. FUNDAMENTO TEÓRICO.....	19
2.3.3.3.LEY DE DEFORMACION Y ENDURECIMIENTO.....	20
2.3.3.4.LEY DE FLUJO.....	22
3.MODELACION NUMERICA DEL MODELO CAM CLAY MODIFICADO Y BARCELONA BASIC MODEL.....	25
3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO CAM CLAY MODIFICADO.....	25
3.2 IMPLEMENTACIÓN DEL BARCELONA BASIC MODEL (BBM).....	33
3.2.1. COMPROBACION DEL MODELO BBM PARA TRAYECTORIAS TENSIONALES ISÓTROPAS DE CARGA Y DESCARGA CON SUCCION CONTROLADA.....	34
3.2.2. RESULTADOS DEL BARCELONA BASIC MODEL (BBM) BAJO UN ESTADO GENERALIZADO DE TENSIONES.....	38
4.INTERPRETACION DE RESULTADOS.....	42
4.1. ANÁLISIS DE LÍNEA DE ESTADO CRÍTICO.....	42
4.2. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION VOLUMETRICA DE COLAPSO PARA DIVERSOS VALORES DE b COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	45
4.3. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION VOLUMETRICA DE COLAPSO PARA DIVERSOS VALORES DE b EFECTO DEL DESVIADOR.....	47

4.4. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION DE CORTE EN FUNCION DEL INCREMENTO DE SUCCION PARA DIFERENTES VALORES DEL PARMETRO b Y DEL DESVIADOR	48
5. CONCLUSIONES LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS	51
6.BIBLIOGRAFIA	53

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Esquema del estado Tensional de un suelo compactado.....	1
Figura 1.2 Modelos elastoplásticos friccionales.(Gens & Potts, 1988).	2
Figura 2.1 Diagonalización del Tensor de Tensiones. (Oliver y Agelet, 2000).	7
Figura 2.2 Plano octaédrico a la derecha y la proyección sobre el plano octaédrico a la izquierda.(Prat, 2006).....	10
Figura 2.3. Criterio de Von Misses (Olivella & Carlos Agelet, 2000).	13
Figura 2.4.Criterio de Tresca. (Olivella & Carlos Agelet, 2000).	13
Figura 2.5. Superficie de rotura en el plano desviador (Gens & Potts, 1988).....	14
Figura 2.6. Criterio de Mohr-Coulomb. (Olivella & Carlos Agelet, 2000).	14
Figura 2.7. Superficie de fluencia del modelo Cam-Clay modificado.(Camacho & Reyes, 2004).	17
Figura 2.8. Superficie de fluencia del modelo Barcelona Basic Model.(Alonso et al., 1990).	18
Figura 3. 1. Metodología para la validación del modelo. (Camacho & Reyes, 2004)....	26
Figura 3.2. Resultados para el caso 01, CD, SC, $p'_{\text{inicial}} = 80 \text{ kPa}$	27
Figura 3.3. Resultados para el caso 02, CU, SC, $p'_{\text{inicial}} = 80 \text{ kPa}$	28
Figura 3.4. Resultados para el caso 03, CD, NC, $p'_{\text{inicial}} = 100 \text{ kPa}$	29
Figura 3.5. Resultados para el caso 04, CU, NC, $p'_{\text{inicial}} = 100 \text{ kPa}$	30
Figura 3.6. Resultados para el caso 05, CD, SC, $p'_{\text{inicial}} = 20 \text{ kPa}$	31
Figura 3.7. Resultados para el caso 06, CU, SC, $p'_{\text{inicial}} = 20 \text{ kPa}$	32
Figura 3.8. Diagrama de Flujo para la implementación del modelo BBM.	34
Figura 3.9 (a) Trayectorias tensionales isotrópicas cambios de carga y succión. (b) Volumen específico vs tensión media neta, a la izquierda gráfica mostrada en (Alonso, et al., 1990) y a la derecha la desarrollada con el modelo BBM.	36
Figura 3. 10 (a) Trayectorias tensionales isotrópicas cambios de carga y succión. (b) Volumen específico vs tensión media neta, a la izquierda gráfica mostrada en (Alonso, et al., 1990) y a la derecha la desarrollada con el modelo BBM.	37
Figura 3.11. Trayectoria bajo el estado generalizado de tensiones, cambios de carga y succión.....	39
Figura 3. 12 Trayectorias de tensiones a diferentes valores de b.	39
Figura 3.13 Cambio de volumen específico en función del incremento de tensión neta para diferentes valores de b.	40
Figura 3.14 Cambio de volumen específico en función de la disminución de succión para diferentes valores de b.	40
Figura 3.15 Cambio de deformación volumétrica en función de la disminución de succión para diferentes valores de b.	41
Figura 3.16 Cambio de deformación de corte en función de la disminución de succión para diferentes valores de b.	41

Figura 4.1 Representación en el plano $p'-q$ de Cambridge de las ecuaciones de Mohr–Coulomb para la determinación de la LEC a compresión y extensión(Cárdenas, 2018).	43
Figura 4.2(a) Desarrollo de las Líneas de estado crítico en ensayos no saturados de ensayos de colapso para valores de $b=0.0, 0.5$ y 1.0 , de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018). (b) Desarrollada con el modelo BBM en MatLab.	44
Figura 4.3. Comportamiento de M en función del ángulo de Lode (influencia de la tensión principal intermedia, σ_2).	45
Figura 4.4. (a) Deformación volumétrica contra succión para valores de $b=0.0, 0.5$ y 1.0 , de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018). (b) Simulación obtenida con el modelo BBM.	46
Figura 4.5. Cambios de la deformación volumétrica en función del incremento de succión para la trayectoria $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .	47
Figura 4.6. Cambios de la deformación volumétrica en función del incremento de succión en la trayectoria $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=100\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .	48
Figura 4.7. Deformación de corte con cambio de succión en la $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=200\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .	49
Figura 4.8. Deformación de corte con cambio de succión en la trayectoria $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=100\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .	49
Figura 4.9. Deformación de corte con cambio de succión en la trayectoria $p=200\text{ MPa}$, $q=0\text{ MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .	50

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros del Modelo Barcelona Basic Model (BBM).	23
Tabla 2. Restricciones de los parámetros LC (Loading -Collapse).	24
Tabla 3. Parámetros adoptados de la asignatura mecánica de suelos avanzada.	26
Tabla 4. Parámetros de ingreso para reproducir el modelo BBM.	35
Tabla 5. Parámetros de ingreso para reproducir el modelo BBM bajo estado de tensión generalizada.	38

1.INTRODUCCIÓN.

Los suelos compactados son de gran importancia para la ejecución de obras civiles, por ejemplo, terraplenes para carreteras, líneas ferroviarias, diques, canales de riego, etc. Las condiciones en que se encuentra sometido un suelo a distintas profundidades son propias de las zonas geográficas, estas condiciones presentan estados tensionales que dependen de su contenido de humedad y su grado de compactación, Figura 1.1. Si el suelo presenta un estado seco y el sitio presenta condiciones húmedas, este se humedecerá provocando asientos del suelo (Alonso, Pinyol, & Gens, 2010).

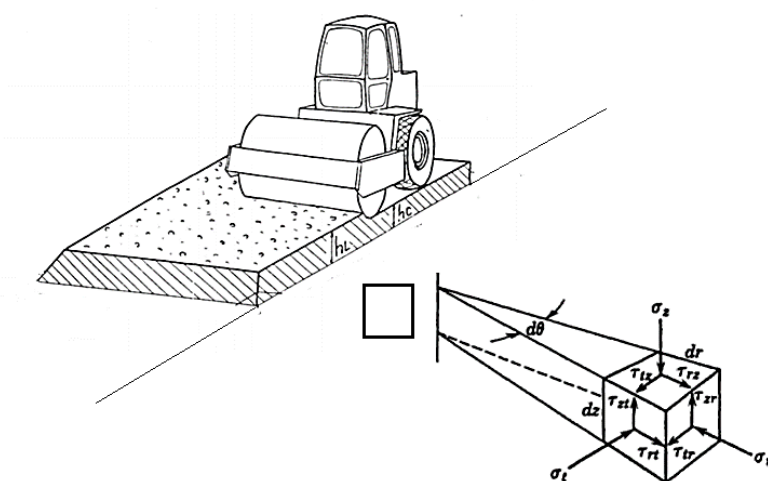


Figura 1.1 Esquema del estado Tensional de un suelo compactado.

Para estudiar el comportamiento mecánico se debe tomar en cuenta los fenómenos de fluencia, deformaciones irreversibles y dilatación inducida por tensiones de corte. La teoría de la plasticidad abarca todas estas características y describe el comportamiento de suelos y rocas. El progreso de modelos de estado crítico ha avanzado notoriamente en las últimas décadas, aplicando dicha teoría a la Mecánica de suelos no saturados, se han desarrollado modelos que se basan en la hipótesis de la plasticidad asociada pueden predecir cualitativamente el comportamiento del suelo. (Gens & Potts, 1988)

El uso de modelos numéricos para describir el comportamiento mecánico de los suelos presenta dificultades debido a la gran cantidad de parámetros necesarios para caracterizar un suelo, esto quiere decir que a mayor número de parámetros se requiere ensayos de laboratorio más complejos y costosos.

En el presente trabajo, se buscó modelos consecutivos capaces de reproducir aspectos del fenómeno de colapso y cuyos parámetros pudieran encontrarse mediante ensayos convencionales de laboratorio. El modelo Cam-Clay modificado (MCCM) para reproducir ensayos de laboratorio de triaxiales convencionales y el Barcelona Basic model (BBM) para la interpretación y predicción de ensayos de cilindro hueco con trayectorias del tipo ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$). Sin embargo, estos modelos no siempre son capaces de reproducir el comportamiento real de los suelos.

1.1. ANTECEDENTES.

Desde las investigaciones realizadas por (Coulomb, 1776) y (Rankine, 1856) existen varias aplicaciones de la teoría de la Plasticidad para describir el comportamiento del suelo mediante modelos elastoplásticos. La aplicación de la plasticidad a la mecánica de suelos saturados se realizó en paralelo al desarrollo de modelos para materiales metálicos. La generalización de los modelos de Tresca y Von Mises, Figura 1.2, tuvieron por primera vez en cuenta el carácter de los suelos (Drucker & Prager, 1952), (Drucker D. , 1953). No obstante, estos modelos no representaban bien el comportamiento de los suelos y la adopción de leyes de fluencia asociadas conducía a la predicción de dilatación excesiva en fluencia y rotura.

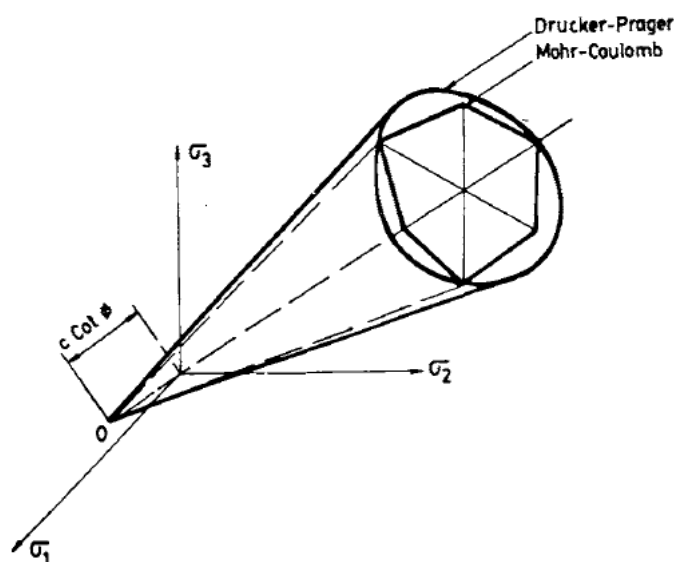


Figura 1.2 Modelos elastoplásticos friccionales. (Gens & Potts, 1988).

Posteriormente hubo importantes contribuciones que llevaron a determinar la formulación de los modelos de Estado Crítico. (Drucker, Gibson, & Henkel, 1957) señalaron que existe una superficie de fluencia controlada por el cambio de volumen, (Roscoe, Schofield, & Wroth, 1958) propusieron una representación del comportamiento basado en el estado crítico y de la presencia de una superficie de estado límite y (Calladine, 1963) indicó que la Plasticidad rigidizable es la base para una formulación sólida que agrupa todos estos conceptos.

A finales de los años 60 aparecen las primeras formulaciones del modelo elasto-plástico de Estado Crítico denominado “Cam-Clay” desarrollado en la Universidad de Cambridge por Roscoe y sus colegas. La formulación del modelo “Cam-Clay” original como una ley constitutiva de tipo elasto-plástico incremental se encuentra en (Roscoe & Schofield, 1963) y (Schofield & Wroth, 1968). Posteriormente, (Roscoe & Burland, 1968) propusieron el modelo “Cam-clay modificado” y su extensión a tres dimensiones (Gens & Potts, 1988).

La elaboración de trabajos experimentales sobre la modelación numérica del comportamiento del suelo compactado bajo estados generalizados de tensiones ha sido escasa, las teorías propuestas para modelar numéricamente se han basado en una generalización de la teoría de estado crítico (Alonso et al., 1990) y (Wheler & Sivakumar, 1995). En los últimos años ha habido un fuerte incremento en la investigación relacionada con la modelación de suelos no saturados. Como complemento a las investigaciones experimentales es necesario poder predecir el comportamiento de estos suelos, es por ello que recientemente se utilizan más programas computacionales que intentan simular lo que sucede en el terreno y así poder solucionar problemas geotécnicos.

1.2. OBJETIVO.

Este trabajo está relacionado principalmente con investigación en el área numérica, así como también con la elaboración e implementación de ecuaciones constitutivas apropiadas para el estudio del comportamiento mecánico de los suelos no saturados.

Los objetivos principales que definen este trabajo son:

- Estudiar e implementar el modelo Cam Clay modificado para condiciones drenadas y no drenadas, formular la matriz elastoplástica del modelo Cam Clay e implementar el modelo con ensayos de laboratorio realizados en la asignatura de mecánica de suelos de la universidad.
- Estudiar e implementar el modelo BBM, para diferentes cambios tensionales de carga y descarga, con humedecimiento y secado comparando los resultados con los ejemplos propuestos en el artículo de (Alonso et al., 1990) .
- Estudiar e Implementar el modelo BBM, bajo un estado tensional generalizado con succión controlada, reproducir los resultados obtenidos en la campaña experimental de (Cárdenas, 2018) y predecir el comportamiento del suelo cuando se satura con diversos valores de la tensión desviadora aplicada

Los objetivos del presente trabajo, conducirán a una comprensión más definida de algunos problemas geotécnicos, asociados a los suelos no saturados, como son las deformaciones producidas por el comportamiento de colapso por saturación, obteniendo las conclusiones pertinentes.

1.3. METODOLOGÍA.

El contenido del trabajo está dividido en 5 capítulos que se enfocan en el estudio, análisis e implementación de modelos consecutivos que estudia el comportamiento mecánico de los suelos no saturados que se detallan a continuación:

1. El capítulo 2 presenta el estado del arte dividida en dos partes, la primera es una breve reseña histórica del estudio de suelos no saturados, los fundamentos de modelos constitutivos. La segunda parte trata sobre modelización constitutiva de suelos no saturados, el criterio de falla, modelo Cam Clay modificado (MCCM) y el modelo Básico de Barcelona (BBM).
2. El capítulo 3 presenta la implementación, comprobación y resultados de la modelación numérica de los modelos Cam Clay modificado y el modelo Básico

de Barcelona, junto con la justificación de parámetros adoptados para cada modelo.

3. El capítulo 4 presenta el análisis de la influencia de la succión en la deformación volumétrica y deformación de corte que presentan los suelos no saturados en la etapa de saturación teniendo en cuenta la variación de la línea de estado crítico respecto al ángulo de Lode. Para ello se ha hecho uso de la modelación numérica BBM bajo un estado tensional generalizado.
4. El capítulo 5 se resumen las principales conclusiones de este trabajo y las futuras líneas de investigación.

2. ESTADO DEL ARTE.

2.1. SUELOS NO SATURADOS.

En las últimas décadas existe un gran incremento sobre la investigación de suelos no saturados, en la parte experimental y numérica, donde se ha llegado a elaborar ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del suelo bajo un estado de tensiones y succiones. Para el desarrollo de modelos constitutivos para un determinado suelo es necesario para conocer con más precisión el comportamiento que presenta el suelo cuando está sometido a diferentes cargas y cambios de succión.

En lo que respecta a los modelos constitutivos, el primer modelo integrado capaz de predecir los diversos aspectos del comportamiento de los suelos no saturados llamado “Loading-Collapse (LC) model”, fue presentado por (Alonso, Gens, & Hight, 1987) que se centraron en el comportamiento del cambio volumen incluido el colapso. El modelo cualitativamente presentó un comportamiento elasto-plástico, el cual describía los principales aspectos sobre el comportamiento de los suelos no saturados. (Alonso et al., 1990) presentaron el modelo BBM que es una versión cuantitativa del modelo LC, donde tanto el cambio de volumen como el comportamiento de resistencia al corte se predijeron dentro de una teoría elasto-plástica, además proporcionaron los valores de parámetros constitutivos del suelo y describieron algunas predicciones del comportamiento del suelo compactado durante la prueba triaxial. Más adelante, los primeros resultados experimentales en el comportamiento del cambio del volumen durante las pruebas de corte aparecieron, dentro del marco general del estado crítico (Toll, 1990), (Wheler & Sivakumar, 1995), (Cui & Delage, 1993), (Maaatouk, Leroueil, & La Rochelle, 1995).

2.2. FUNDAMENTOS DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS.

Los modelos constitutivos por general están formulados en base a la teoría de que el suelo es un medio continuo (Malvern, 1969) y (Spencer, 1980) concluyeron que para resolver un problema tenso-deformacional se deben cumplir las tres ecuaciones básicas de la mecánica de medio continuos :

- Ecuación de equilibrio de tensiones.
- Ecuación de compatibilidad de deformaciones.
- Ecuación constitutiva que relaciona tensiones y deformaciones.

El tensor de tensiones efectivas de segundo orden representa el estado tensional en los suelos:

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 1}$$

En general, habrá seis componentes que actúan sobre las seis caras de un elemento representado como un paralelepípedo rectangular como se muestra en la Figura 2.1.

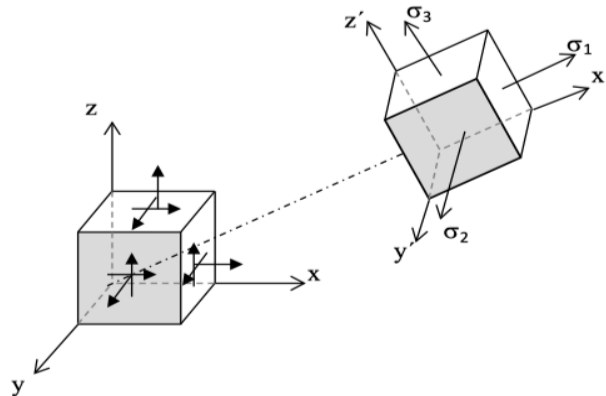


Figura 2.1 Diagonalización del Tensor de Tensiones. (Oliver y Agelet, 2000).

El tensor de tensiones, ecuación 1, es simétrico ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$) y puede expresarse en dos componentes una volumétrica y otra componente desviadora:

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' & 0 & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & 0 & p' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} - p' & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_{yy} - p' & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_{zz} - p' \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2}$$

o

$$\sigma' = p'I + s \quad \text{Ec. 3}$$

donde σ' es el tensor de tensiones efectivas, I es el tensor identidad, s es la tensión desviadora y p' es la tensión efectiva y se puede calcular como:

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) \quad \text{Ec. 4}$$

Las deformaciones pueden expresarse en forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5}$$

Donde el tensor de deformaciones Ec. 5 es simétrico ($\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$; $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$; $\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}$.) y puede expresarse en dos componentes, una componente volumétrica y otra componente desviadora:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_v}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_v}{3} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \frac{\varepsilon_v}{3} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \frac{\varepsilon_v}{3} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 6}$$

o

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon_v I + \boldsymbol{e} \quad \text{Ec. 7}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformación, \boldsymbol{e} es el tensor de deformación desviadora y ε_v es la deformación volumétrica que se puede obtener con la expresión:

$$\varepsilon_v = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad \text{Ec. 8}$$

La hipótesis de varios modelos constitutivos es la isotropía (las características del material no cambian con la dirección). Es por esto que la formulación se realiza en función de los invariantes de tensión. Los invariantes son la tensión efectiva neta p' , la tensión desviadora J o q , y la tercera invariante J_3 (ángulo de Lode θ) y se expresan:

1º invariante de tensión:

$$p' = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) \quad \text{Ec. 9}$$

2º invariante de tensión:

$$J = \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}) \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma'_1 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2]^{1/2} \quad \text{Ec. 10}$$

o

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma'_1 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_1 - \sigma'_2)^2]^{1/2} \quad \text{Ec. 11}$$

3º invariante de tensión:

$$J_3 = \frac{1}{3} tr(\mathbf{s}^3) = s_1 s_2 s_3 \quad Ec. 12$$

o

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2b-1}{\sqrt{3}} \quad Ec. 13$$

Donde

$$b = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_3}{\sigma'_1 - \sigma'_3} \quad Ec. 14$$

El ángulo de Lode está comprendido entre -30° y $+30^\circ$, suponiendo que las tensiones principales están ordenadas de forma que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$\sigma_1 = \sigma_2$	$\theta = +30^\circ$	$b=1$
$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$	$\theta = 0^\circ$	$b=0.5$
$\sigma_2 = \sigma_3$	$\theta = -30^\circ$	$b=0$

En el espacio de tensiones principales $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, dado un estado tensional definido por un punto $\Sigma = (\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, los invariantes indicados en las ecuaciones (9), (11) y (13) tienen la siguiente interpretación geométrica, (Prat, 2006):

- $\sqrt{3}p$ representa la distancia del origen de coordenadas al plano octaédrico que contiene Σ , Figura 2.2.
- $\sqrt{2}J$ representa la distancia, medida sobre el plano octaédrico, entre el punto Σ y la proyección sobre dicho plano del origen de coordenadas, Figura 2.2.
- La interpretación geométrica del ángulo de Lode θ puede verse en la Figura 2.2.

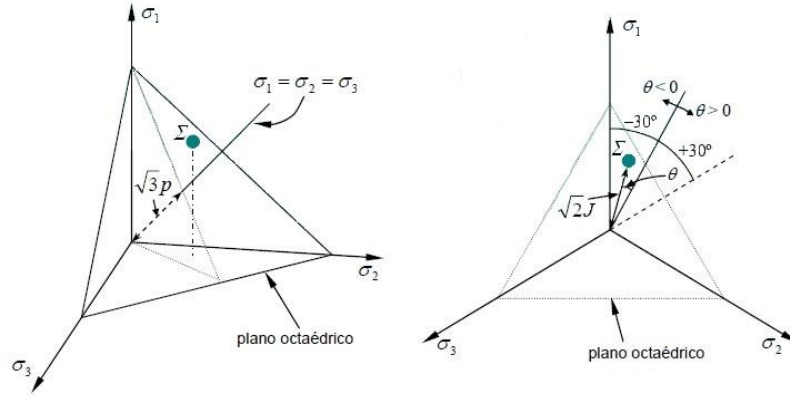


Figura 2.2 Plano octaédrico a la derecha y la proyección sobre el plano octaédrico a la izquierda. (Prat, 2006)

Los invariantes de deformación, son la deformación volumétrica ε_v , la deformación desviadora J_s o ε_s y la tercera invariante de deformación J_3 y se expresan:

1º invariante de deformación:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{Ec. 15}$$

2º invariante de deformación:

$$J_s = \frac{2}{\sqrt{6}} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2]^{1/2} \quad \text{Ec. 16}$$

o

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} e : e \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2] \quad \text{Ec. 17}$$

3º invariante de deformación:

$$J_3 = \det(e) = e_1 e_2 e_3 \quad \text{Ec. 18}$$

Para modelar los datos obtenidos de ensayos triaxiales de un suelo, es conveniente expresar los incrementos de tensión y de deformación en función de los invariantes de tensión $q - p'$ y los invariantes de deformación $d\varepsilon_s - d\varepsilon_v$.

Tensiones:

$$p' = I'_1 \quad I'_1 = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma') \quad \text{Ec. 19}$$

$$q = \sqrt{3J'_2} \quad J'_2 = \frac{1}{2} s' : s' \quad \text{Ec. 20}$$

Donde

$$s' = \sigma' - \frac{1}{3}tr(\sigma') \quad Ec. 21$$

Donde s' es el tensor de tensiones desviadoras, σ' es el tensor de tensiones efectivas y $\frac{1}{3}tr(\sigma')$ es la traza de tensor de tensiones efectivas.

Espacio de Deformaciones:

$$d\varepsilon_v = tr(d\varepsilon)$$

$$d\varepsilon_s = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}de:de\right) \quad Ec. 22$$

Donde

$$de = d\varepsilon - \frac{1}{3}tr(d\varepsilon) \quad Ec. 23$$

Donde e es el tensor de deformaciones desviadoras, ε es el tensor de deformaciones totales y $tr(d\varepsilon)$ es la traza del tensor de deformaciones totales.

En el caso particular de compresión, las tensiones y deformaciones están expresados de forma incremental:

$$dp' = \frac{1}{3}(d\sigma'_1 + 2d\sigma'_3) \quad dq = (d\sigma'_1 - d\sigma'_3) \quad Ec. 24$$

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3 \quad d\varepsilon_s = \frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \quad Ec. 25$$

2.3. MODELACIÓN CONSTITUTIVA.

2.3.1. CRITERIO DE ROTURA.

La superficie de rotura es el límite de los estados tensionales posibles en un medio, Si el medio es isótropo, la rotura no se ve afectada por una rotación de ejes en el espacio de tensiones. Por lo tanto, la función que define la superficie de rotura puede escribirse en función de los invariantes de tensiones.

La formulación inicial del estado crítico se basó, en resultados de ensayos triaxiales convencionales. Las zonas de espacio de tensiones en los que estos ensayos son muy limitadas ya que la tensión principal intermedia debe ser igual a la tensión principal mayor o a la tensión principal menor. Por tanto, la formulación se desarrolló en términos de q y

p' . Lo más apropiado que deben cumplir los modelos para análisis numéricos, es que deben estar generalizados por lo menos en tres dimensiones. (Gens & Potts, 1988)

La primera generalización se efectuó simplemente reemplazando q por J (segundo invariante de tensión). Esto es parecido a suponer que el potencial plástico y la superficie de fluencia son círculos en el plano desviador (Figura 2.5). Por otro lado, un criterio tipo Von-Mises no representa bien las condiciones de rotura para suelos que siguen un criterio del tipo de Mohr-Coulomb. (Roscoe & Burland, 1968) concluyeron que las superficies circulares de fluencia fueran usadas en conjunción con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Esto implica, sin embargo, que las condiciones de estado crítico sólo pueden alcanzarse bajo condiciones de compresión triaxial ($\sigma_2=\sigma_3$). (Zienkiewicz & Naylor, 1973) propusieron la siguiente variación de M con el ángulo de Lode (θ).

$$M = \frac{3 \sin \phi'}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \phi'} \quad \text{Ec. 26}$$

donde ϕ' es el ángulo de fricción y θ el ángulo de Lode.

Para un estado generalizado de tensiones la pendiente de la línea de estado crítico (M) puede definirse utilizando el ángulo de Lode, θ , e interpolando entre los valores de M_c y M_e obtenidos en ensayos triaxiales de compresión y extensión (Argyris *et al* 1974):

$$M = \frac{2\mu}{(1+\mu)-(1-\mu) \cos 3\theta} M_c \quad \text{Ec. 27}$$

Donde:

$$\mu = M_e/M_c$$

$$M_c = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}$$

$$M_e = \frac{6 \sin \phi}{3 + \sin \phi}$$

Las Figuras 2.3 a 2.5 muestran algunas superficies de rotura descritas por (Gens & Potts, 1988) las formulaciones de estas pueden encontrarse en (Olivella & Carlos Agelet, 2000).

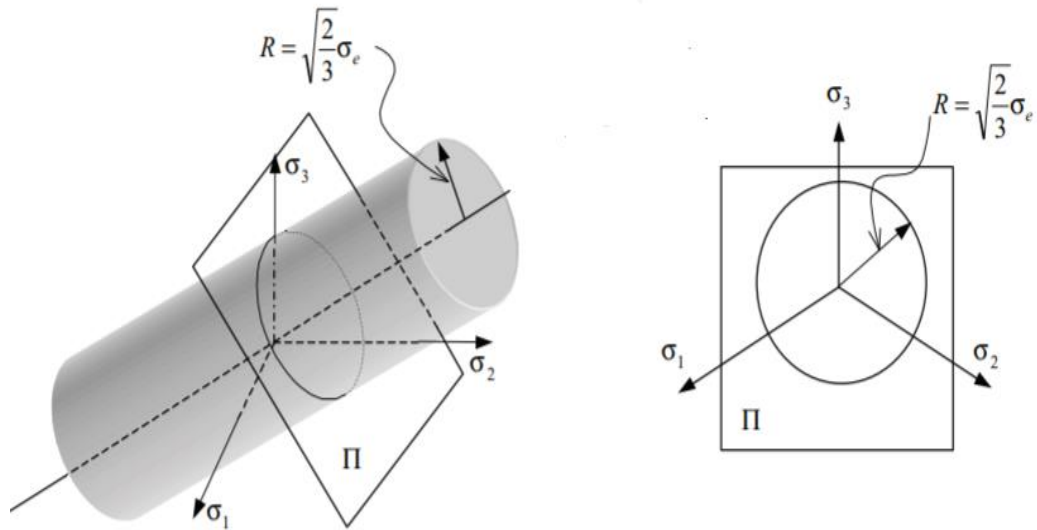


Figura 2.3. Criterio de Von Misses (Olivella & Carlos Agelet, 2000).

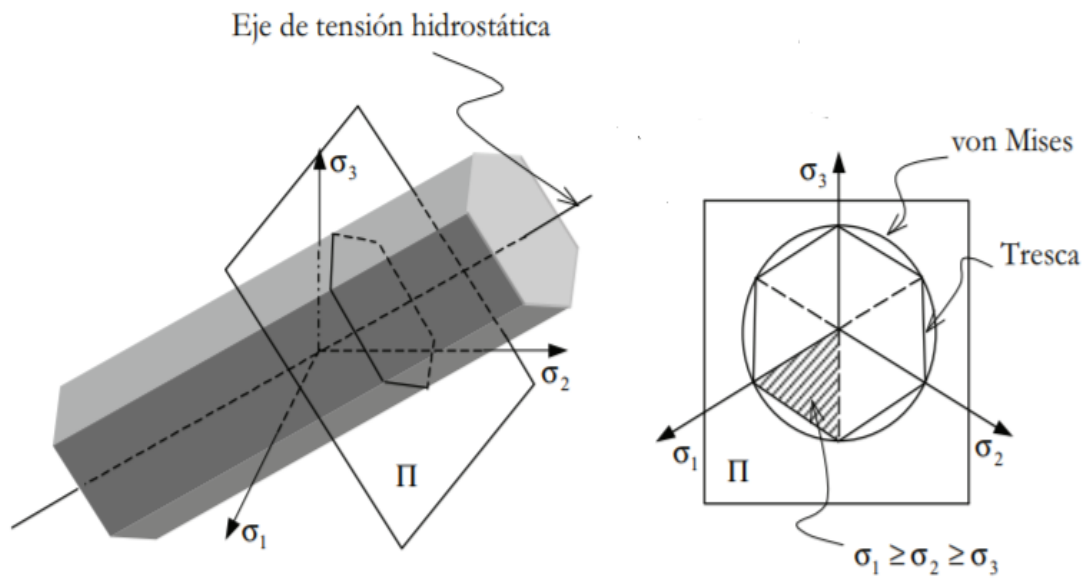


Figura 2.4. Criterio de Tresca. (Olivella & Carlos Agelet, 2000).

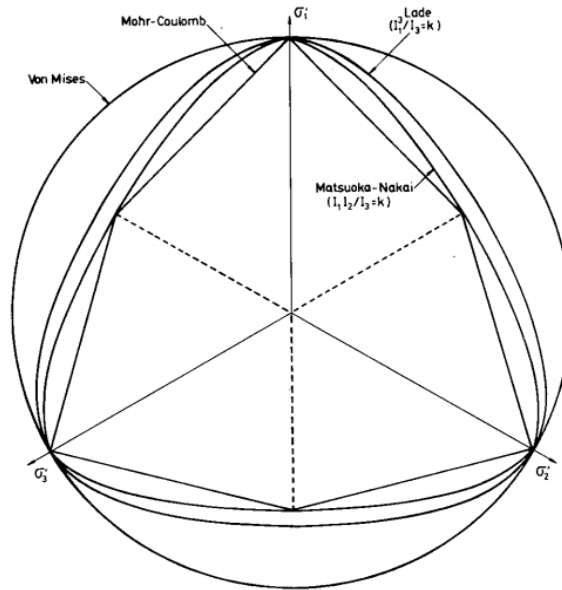


Figura 2.5. Superficie de rotura en el plano desviador (Gens & Potts, 1988).

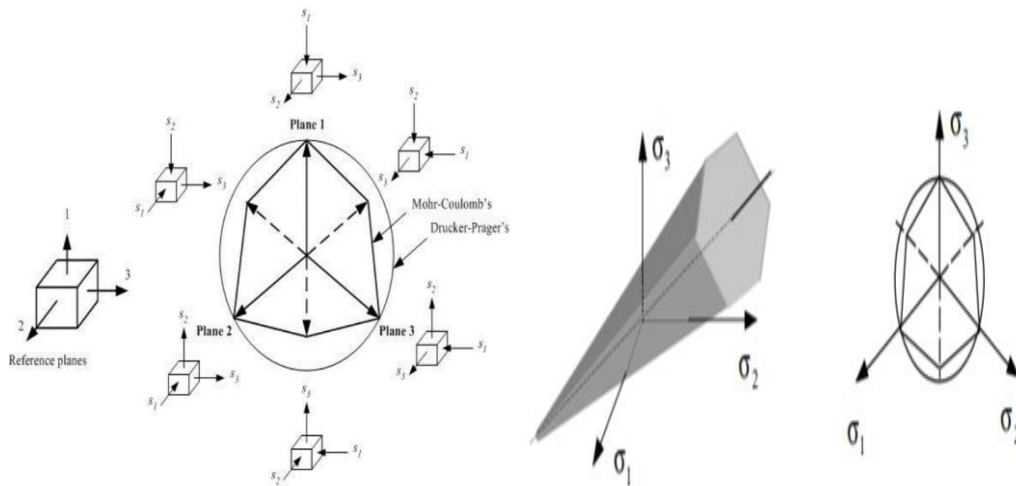


Figura 2.6. Criterio de Mohr-Coulomb. (Olivella & Carlos Agelet, 2000).

La expresión Ec. 28 es el criterio de Mohr-Coulomb formulado en el plano desviador. La discontinuidad de esta ecuación para valores del ángulo de lode $\theta = \pm 30^\circ$ requiere, generalmente, un redondeo "ad hoc" de las esquinas, (Gens & Potts, 1988).

Criterio de rotura Mohr-Coulomb:

$$M(\theta) = \frac{\sqrt{3} \sin \phi}{\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi} \quad \text{Ec. 28}$$

2.3.2. MODELO CAM CLAY MODIFICADO.

2.3.2.1. INTRODUCCIÓN.

A lo largo del tiempo se han ido desarrollado teorías que intentan predecir el comportamiento de los suelos en términos de deformaciones plásticas, tal es así que en los años 60 en la Universidad de Cambridge se desarrolló en primera instancia el modelo Cam-Clay a la que finalmente se realizaron cambios en su formulación que se llamó Cam-Clay modificado.

En principio el modelo Cam-Clay estuvo concebido para reproducir suelos en estado normalmente consolidado o ligeramente sobre-consolidado, no obstante, hoy en día en la práctica no se restringe su uso. El modelo modificado considera una superficie de fluencia simplificada a través de una elipse, en la que, si la trayectoria de tensiones coincide con el potencial plástico, el suelo entrará en una zona de plastificación.

El modelo Cam-Clay modificado introduce el principio de estado crítico del suelo, en donde se logra observar el cambio de deformaciones volumétricas plásticas bajo cambios tensionales en el suelo. El modelo emplea una constante M , que define la pendiente del estado de rotura, adicionalmente introduce la ley de flujo o dilatancia, en donde es posible reproducir el comportamiento de suelo en condición contráctate o dilatante, es decir reducción o aumento de la deformación volumétrica, respectivamente.

2.3.2.2. FUNDAMENTO TEÓRICO.

El comportamiento no lineal merece especial atención a través de formulaciones más complejas de tal forma se represente de una manera adecuada dicho comportamiento. En tal sentido, el modelo Cam Clay modificado representa el comportamiento de arcillas y tiene gran relevancia en la modelización geotécnica. En definitiva, el modelo Cam-Clay modificado se encuentra definido por los principios fundamentales:

- Espacio elástico.
- Superficie de fluencia.

- Superficie de potencial plástico
- Ley de endurecimiento.

Es importante conocer las hipótesis fundamentales del modelo Cam-Clay modificado: la plasticidad asociada, rigidización isotrópica, y la rigidización depende de las deformaciones plásticas.

2.3.2.3. PROPIEDADES ELÁSTICAS.

Son la relación entre el incremento en los esfuerzos efectivos ($\delta p'$ y δq) y los incrementos en deformaciones elásticas ($\delta \varepsilon_p^e$ y $\delta \varepsilon_q^e$) del material, se presenta de una forma matricial Ec. 29.

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_p^e \\ \delta \varepsilon_q^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{v^* p'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 29}$$

2.3.2.4. SUPERFICIE DE FLUENCIA.

Es el espacio de esfuerzo en el plano p' - q que delimita los esfuerzos que produce o no deformaciones plásticas. La superficie de fluencia tiene una forma de elipse, la cual está centrada en el eje de coordenadas p' , y se representa:

$$\frac{p'}{p'_o} = \frac{M^2}{M^2 + \eta^2} \quad \text{Ec. 30}$$

Donde:

η : Cociente entre los esfuerzos p' y q

p'_o : Esfuerzo que controla el tamaño de la superficie de fluencia

M representa la pendiente de la línea de estado crítico que controla la forma de la superficie de fluencia. En la Figura 2.7 se grafica la superficie de fluencia. Cuando p' y q se encuentran dentro de esta superficie, se presentan deformaciones elásticas; por otro lado, una vez que la trayectoria alcanza a la elipse, se genera fluencia, deformaciones elásticas y se empiezan a presentar deformaciones plásticas.

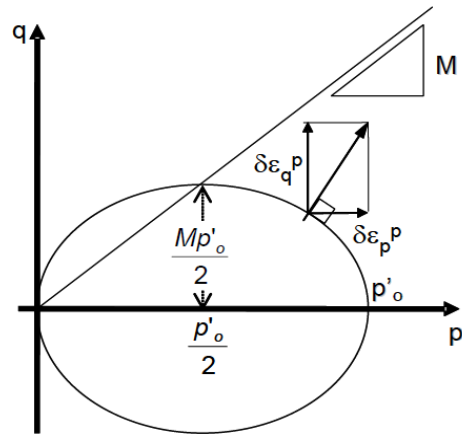


Figura 2.7. Superficie de fluencia del modelo Cam-Clay modificado.(Camacho & Reyes, 2004).

2.3.2.5. POTENCIAL PLASTICO.

Es la relación entre las componentes volumétrica ($\delta\epsilon_p^p$) y cortante ($\delta\epsilon_q^p$) llamadas deformaciones plásticas. El modelo considera plasticidad asociada y, por tanto, identifica la superficie de fluencia y con la del potencial plástico. En la Figura 2.7 se representa con un vector, la magnitud de deformación plástica. La componente vertical es el incremento en la deformación cortante plástica ($\delta\epsilon_q^p$) y la componente horizontal es el incremento en la deformación la volumétrica plástica ($\delta\epsilon_p^p$). Este vector es perpendicular a la superficie de fluencia, por lo tanto, si se conoce la ecuación de la superficie de fluencia, se puede conocer la dirección del vector, se representa:

$$\frac{\delta\epsilon_p^p}{\delta\epsilon_q^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad \text{Ec. 31}$$

2.3.2.6. LEY DE ENDURECIMIENTO.

Es la que muestra cuáles son las magnitudes de las deformaciones plásticas y como puede cambiar la superficie de fluencia. El tamaño de la superficie de fluencia depende de p'_o , valor que no es constante pues depende de la deformación volumétrica plástica, se representa:

$$\frac{\partial p'_o}{\partial \epsilon_p^p} = \frac{v^* p'_o}{\lambda - \kappa} \quad \text{Ec. 32}$$

2.3.3. MODELO BASICO DE BARCELONA (BBM).

2.3.3.1. INTRODUCCION.

Las primeras investigaciones de la mecánica de los suelos no saturados empezaron a partir de los años sesenta. El primer desarrollo para la modelación elasto-plástica de suelos no saturados fue presentado por (Alonso et al., 1990), que ha desarrollado el modelo básico de Barcelona (BBM) al extender el modelo Cam-Clay modificado propuesto por (Roscoe & Burland, 1968).

El modelo BBM está definido en términos de la tensión media neta, p , y la tensión desviadora, q . Se propuso una superficie de fluencia elíptica superficie de fluencia, para una muestra sometida a una succión constante s y que presenta una tensión de pre-consolidación isótropa dada por p_{0s} que define LC (Loading-Collapse), Figura 2.8. La succión matricial, $s = u_a - u_w$, está incluida como una tercera variable de estado para reproducir los efectos de la succión. Por lo tanto, el Barcelona Basic Model trabaja bajo el marco del modelo Cam Clay modificado, siendo capaz de predecir el comportamiento de los suelos saturados, cuando el valor de $s=0$. La representación de la superficie de fluencia para condiciones saturadas, $s=0$, y condiciones no saturadas $s \neq 0$ se representan en la Figura 2.8.

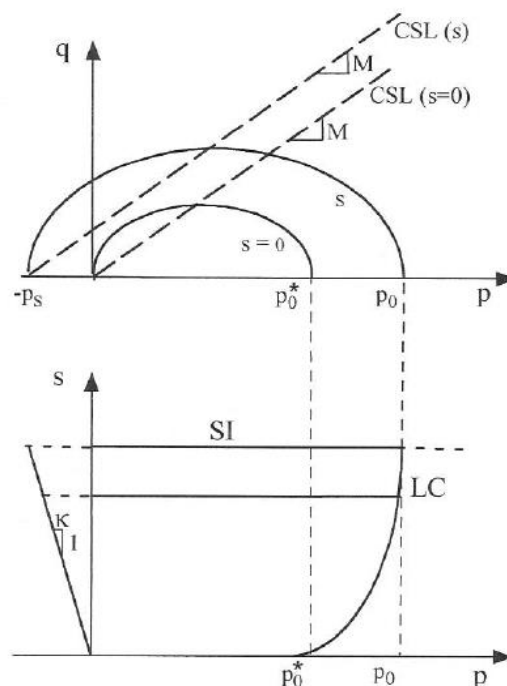


Figura 2.8. Superficie de fluencia del modelo Barcelona Basic Model. (Alonso et al., 1990).

Al igual que los suelos saturados, existen varios modelos constitutivos con capacidad para modelar algunos aspectos del comportamiento de los suelos no saturados. El BBM, presentado por Alonso et al. (1990), fue la fuerza impulsora detrás del desarrollo de modelos para suelos no saturados y ha sido la más utilizada en los últimos años. Por lo tanto, es bastante relevante estudiar la formulación matemática del BBM para evaluar sus capacidades y limitaciones.

2.3.3.2. FUNDAMENTO TEÓRICO.

El modelo Barcelona Basic Model (BBM) utiliza la teoría de la plasticidad, incluyendo la teoría estado crítico LC. El modelo fue desarrollado para describir el comportamiento de suelos no saturados, ligeramente o moderadamente expansivos, limos y arcillas de baja plasticidad.

El modelo BBM está representado por dos variables de estado, representadas por las ecuaciones 33 y 34, donde σ representa el tensor de tensión total, I el tensor de identidad y σ_{net} el tensor de tensión neta.

$$\sigma_{net} = \sigma - u_a I \quad \text{Ec. 33}$$

$$s = u_a - u_w \quad \text{Ec. 34}$$

El modelo contiene dos superficies de fluencia, acopladas en el espacio de tensión. La primera superficie de fluencia, representada por f_1 , depende del valor de la tensión de consolidación para condiciones saturadas, p_o^* , y la segunda superficie de fluencia, representada por f_2 , depende del valor histórico máximo de succión que se haya producido anteriormente, s_o .

La superficie f_1 está representada por la ecuación 35 junto con las ecuaciones 36 a 38, donde q representa la tensión desviadora, p la tensión media, M la pendiente de la línea de estado crítico, p_s la tensión media mínima correspondiente a un valor de succión, p_o la tensión de consolidación para $s \neq 0$, p_c la tensión de referencia, $\lambda(s)$ y $\lambda(0)$ el parámetro de rigidez para las variaciones de tensión media neta para los estados vírgenes del suelo para $s \neq 0$ y $s = 0$, respectivamente, κ el parámetro de rigidez elástica para los cambios

en la tensión media neta, r el parámetro que define la rigidez máxima del suelo y β el parámetro que controla la tasa de rigidez del suelo que aumenta con la succión.

$$f_1(p, q, s) = q^2 - M^2(p + p_s)(p_o - p) = 0 \quad \text{Ec. 35}$$

$$p_o = p^c \left(\frac{p_o^*}{p^c} \right)^{\frac{\lambda_{(0)} - \kappa}{\lambda_{(s)} - \kappa}} \quad \text{Ec. 36}$$

$$\lambda_{(s)} = \lambda_{(0)} [(1 - r)e^{-\beta s} + r] \quad \text{Ec. 37}$$

$$p_s = ks \quad \text{Ec. 38}$$

La superficie f_2 está representada por la ecuación 39. Esta pretende reproducir la deformación volumétrica plástica debido a un aumento de succión.

$$f_2 = s - s_0 = 0 \quad \text{Ec. 39}$$

(Alonso et al., 1990) presentan una regla de flujo no asociada para la superficie f_1 , según la ecuación 40, donde se elige α de tal manera que la regla de flujo predice una tensión lateral cero para los estados de tensión en reposo. El valor de α no es un parámetro adicional del modelo, su valor está determinado por la relación entre el coeficiente de presión de la tierra en reposo, κ_0 y M se deduce por la imposición de un incremento de la deformación plástica lateral cero. Para f_2 , (Alonso et al., 1990) presentan una regla de flujo asociada, según la ecuación 41.

$$g_1 = \alpha \left(\frac{q}{M} \right)^2 - (p + p_s)(p_o - p) \quad \text{Ec. 40}$$

$$g_2 = f_2 = s - s_0 \quad \text{Ec. 41}$$

2.3.3.3.LEY DE DEFORMACION Y ENDURECIMIENTO.

La ley de deformación-endurecimiento permite encontrar la magnitud de la deformación plástica. El modelo BBM asume que la evolución de la superficie de fluencia está controlada por los parámetros de endurecimiento $p_{0(0)}$ y s_0 estos parámetros están en función del suelo deformado. En modelos elasto-plásticos el incremento de deformación volumétrica total puede ser calculada como $d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p$.

No obstante, para suelos no saturados como el modelo elástico propuesto, $d\varepsilon_v^e$ y el modelo plástico, $d\varepsilon_v^p$, el incremento de deformación volumétrica debe ser calculado considerando el incremento de tensión como un incremento en la succión. Los, incrementos de

deformación elásticos y plásticos pueden ser calculados por las ecuaciones 42 y 43 respectivamente.

$$d\varepsilon_v^e = d\varepsilon_{vp}^e + d\varepsilon_{vs}^e \quad \text{Ec. 42}$$

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{vp}^p + d\varepsilon_{vs}^p \quad \text{Ec. 43}$$

Donde

$d\varepsilon_{vp}^e$ = incremento de deformación volumétrica elástica debido a cambios en p.

$d\varepsilon_{vs}^e$ = incremento de deformación volumétrica elástica debido a cambios en s.

$d\varepsilon_{vp}^p$ = incremento de deformación volumétrica plástica debido a cambios en p.

$d\varepsilon_{vs}^p$ = incremento de deformación volumétrica plástica debido a cambios en s.

El incremento de deformación volumétrica total debido a cambios de tensión media, p, puede ser calculado por la ecuación 44, el incremento de deformación volumétrica debido a cambios de succión, s, puede ser calculado con la ecuación 45.

$$d\varepsilon_{vp} = d\varepsilon_{vp}^e + d\varepsilon_{vp}^p \quad \text{Ec. 44}$$

$$d\varepsilon_{vs} = d\varepsilon_{vs}^e + d\varepsilon_{vs}^p \quad \text{Ec. 45}$$

Partiendo de la suposición de que el suelo se comporta de forma elástica durante la carga y la descarga isótropa, el módulo elástico está relacionado con el índice de hinchamiento, κ , Por lo tanto, un incremento de p en la zona elástica producirá una deformación volumétrica dada por la ecuación 46, en cambio un aumento de la succión en la zona elástica producirá una deformación volumétrica representada por la ecuación 47.

$$d\varepsilon_{vp}^e = \frac{\kappa}{v} \frac{dp}{p} \quad \text{Ec. 46}$$

$$d\varepsilon_{vs}^e = \frac{\kappa_s}{v} \frac{ds}{(s+p_{atm})} \quad \text{Ec. 47}$$

Cuando la tensión media, p, alcanza el valor de LC de la superficie de fluencia $p_{0(s)}$ la deformación volumétrica total para el aumento de p, para un valor dado de succión, s, se calcula con la ecuación 48. La componente plástica del incremento de deformación volumétrica total puede ser calculada con la ecuación 49 que es el resultado de restar el incremento de deformación plástica del incremento de la deformación volumétrica total.

$$d\varepsilon_{vp} = \frac{\lambda_{(s)}}{v} \frac{dp_{0(s)}}{p_{0(s)}} \quad \text{Ec. 48}$$

$$d\varepsilon_{vp}^p = \frac{\lambda_{(s)} - \kappa}{v} \frac{dp_{0(s)}}{p_{0(s)}} \quad \text{Ec. 49}$$

Cualquier incremento en la succión, s , por encima de s_0 , inducirá un incremento en la deformación volumétrica total, que se calcula con la ecuación 50.

$$d\varepsilon_{vs} = \frac{\lambda(s)}{v} \frac{ds_0}{(s_0 + p_{atm})} \quad \text{Ec. 50}$$

El incremento de la deformación volumétrica plástica producida por un aumento de la succión s , puede ser calculada con la ecuación 51, que se define como la resta del incremento volumétrico de la deformación elástica y del incremento de deformación volumétrica total:

$$d\varepsilon_{vp}^p = \frac{\lambda_s - \kappa_s}{v} \frac{ds_0}{(s_0 + p_{atm})} \quad \text{Ec. 51}$$

(Alonso et al., 1990) concluye que las deformaciones plásticas tienen un efecto igual que en el control de la posición de la superficie de fluencia es decir que la deformación volumétrica total, $d\varepsilon_v^p$ está en relación del cambio en $p_{0(0)} = p_0^*$ y s_0 y puede ser calculado por la ecuación 52 y 53:

$$dp_0^* = \frac{vp_0^*}{\lambda_{(0)} - \kappa} d\varepsilon_v^p \quad \text{Ec. 52}$$

$$ds_0 = \frac{v(s_0 + p_{atm})}{\lambda_s - \kappa_s} d\varepsilon_v^p \quad \text{Ec. 53}$$

Las leyes de endurecimiento asociadas con las superficies f_1 y f_2 se obtienen mediante las ecuaciones 52 y 53, respectivamente, donde $d\varepsilon_v^p$ representa el incremento de la deformación volumétrica plástica, v el volumen específico, λ_s el parámetro de rigidez para los cambios en la succión en los estados vírgenes del suelo, κ_s el parámetro de rigidez elástica para los cambios en la succión y p_{atm} la presión atmosférica.

2.3.3.4. LEY DE FLUJO.

La ley de flujo no asociada, determina la dirección de los incrementos de la deformación plástica, sin embargo, es conocido que los modelos constitutivos convencionales sobrestiman los valores de K_0 (Gens & Potts, 1988). La expresión presentada por (Ohmaki 1982) cambia la ley de flujo mediante la introducción de un parámetro α , como se aprecia en la ecuación 54. (Alonso et al., 1990) definen que los incrementos de deformación plástica asociada a la superficie de fluencia son el incremento volumétrico

de deformación plástica, $d\varepsilon_{vp}^p$, y los incrementos de deformación desviadora plástica, $d\varepsilon_q^p$.

$$\frac{d\varepsilon_q^p}{d\varepsilon_{vp}^p} = \frac{2q\alpha}{M^2[2p+p_s-p_{0(s)}]} \quad \text{Ec. 54}$$

El valor de α se puede calcular con la ecuación 55 que considera $K_0 = 1 - \sin(\phi')$ e ignora los incrementos de tensión desviadora.

$$\alpha = \frac{M(M-9)(M-3)}{9(6-M)(1-\frac{\kappa}{\lambda_{(0)}})} \quad \text{Ec. 55}$$

El incremento de deformación elástica producida por los cambios en la tensión desviadora, q , pueden ser calculados en función del módulo de corte, G , por:

$$d\varepsilon_s^e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1^e - d\varepsilon_2^e)^2 + (d\varepsilon_2^e - d\varepsilon_3^e)^2 + (d\varepsilon_3^e - d\varepsilon_1^e)^2} = \frac{1}{3G} dq \quad \text{Ec. 56}$$

Si existe incremento de deformación plástica que está asociado con el incremento de la succión, la superficie de fluencia será el incremento de deformación volumétrica plástica, debido a los cambios en s , $d\varepsilon_{vs}^p$, que se representada por la ecuación 50.

Las variables que definen el estado inicial y los parámetros del BBM se representan en la Tabla 1. Los seis parámetros requeridos para la modelación numérica tienen las restricciones presentadas en la Tabla 2.

Tabla 1. Parámetros del Modelo Barcelona Basic Model (BBM).

DESCRIPCIÓN	PARÁMETRO
Estado inicial	p, q, s_0, v, p_0^*, e
Parámetros relacionados con la LC (Loading -Collapse)	$p^c, \kappa, r, e, \lambda_{(0)}, \beta$
Parámetros relacionados con los cambios de succión	$\lambda_{(s)}, e, \kappa_s$
Parámetros relacionados con los cambios en la tensión de corte y la resistencia al corte.	G, M, e, k

Tabla 2. Restricciones de los parámetros LC (Loading -Collapse).

PARÁMETROS	RESTRICCIONES
p^c, p_0^*	$0 < p^c < p_0^*$
$\lambda_{(0)}, \kappa$	$0 < \kappa < \lambda_{(0)}$
β	$\beta > 0$
r	$\frac{\kappa}{\lambda_{(0)}} < r < 1$

Los parámetros k y M tienen implicaciones directas en la geometría de la superficie de fluencia y, por lo tanto, en la dimensión del dominio elástico. La resistencia al corte, q , es una relación lineal de p y s , como se muestra en la ecuación 58.

$$\frac{p_0^*}{p^c} > \exp \left[\frac{1 - \frac{\kappa}{\lambda_{(0)}}}{1 - r} - 2 \right] \quad \text{Ec. 57}$$

$$q = M(p + p_s) = M(p + ks) \quad \text{Ec. 58}$$

3.MODELACION NUMERICA DEL MODELO CAM CLAY MODIFICADO Y BARCELONA BASIC MODEL.

En este capítulo se centra en el desarrollo e implementación del modelo numérico Cam Clay modificado (MCCM) y el Barcelona Basic model (BBM) para los siguientes casos:

- Cam Clay Modificado (MCCM): Se desarrolla la formulación matemática y se aplica al caso de un ensayo triaxial convencional, para una muestra de arcilla ligeramente sobreconsolidada, normalmente consolidada y muy sobreconsolidada.
- Barcelona Basic model (BBM): Se desarrolla la formulación matemática del modelo BBM, a lo largo de diferentes trayectorias de carga-descarga a diferentes estados de succión y de cambios de succión bajo carga constante.
- Barcelona Basic model (BBM tensiones generalizadas): Se desarrolla la formulación matemática para el modelo BBM para un estado generalizado de tensiones. Se considera la influencia de la tensión intermedia en la pendiente de la línea de estado crítico con el uso del parámetro b . Se consideran diferentes trayectorias de carga-descarga con succión controlada y de cambio de succión con carga controlada, manteniendo el valor del parámetro b constante.

Los modelos a desarrollar ayudarán a reproducir comportamientos complejos mediante un número limitado de parámetros que son fácilmente medibles en laboratorio.

3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO CAM CLAY MODIFICADO.

La formulación del modelo para el caso drenado y no drenado se presenta en el apéndice A. La Figura 3.1, (Camacho & Reyes, 2004), resume la metodología empleada.

Para evaluar el desempeño del modelo, se hizo mediante la comparación de los resultados de un ejercicio desarrollado en la asignatura Mecánica de Suelos Avanzada impartida en el Máster dónde se propone 6 casos esquemáticos, en la que se pretende representar un

ensayo triaxial convencional para una muestra de arcilla ligeramente sobreconsolidada, normalmente consolidada y muy sobreconsolidada. Los parámetros de ingreso se muestran en la Tabla 3

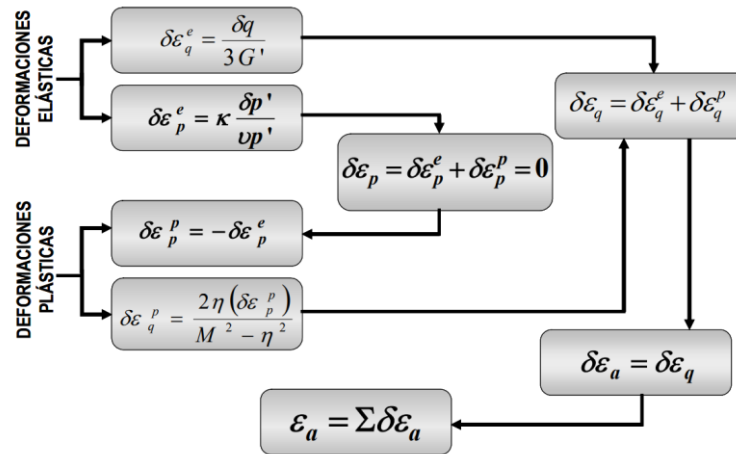


Figura 3. 1. Metodología para la validación del modelo. (Camacho & Reyes, 2004).

Tabla 3. Parámetros adoptados de la asignatura mecánica de suelos avanzada.

PARÁMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR	UNIDAD
p_0^*	Presión de pre consolidación	100	kPa
M	Pendiente CSL	1.2	-
κ	Pendiente de la rama elástica.	0.02	-
λ	Pendiente de la línea de compresión virgen.	0.2	-
e	Índice de poros inicial	0.87	-
ν	Coficiente de Poisson	0.4	-

Caso 01: Suelo SC – Ensayo triaxial drenado, la presión p'_{inicial} es de 80 KPa.

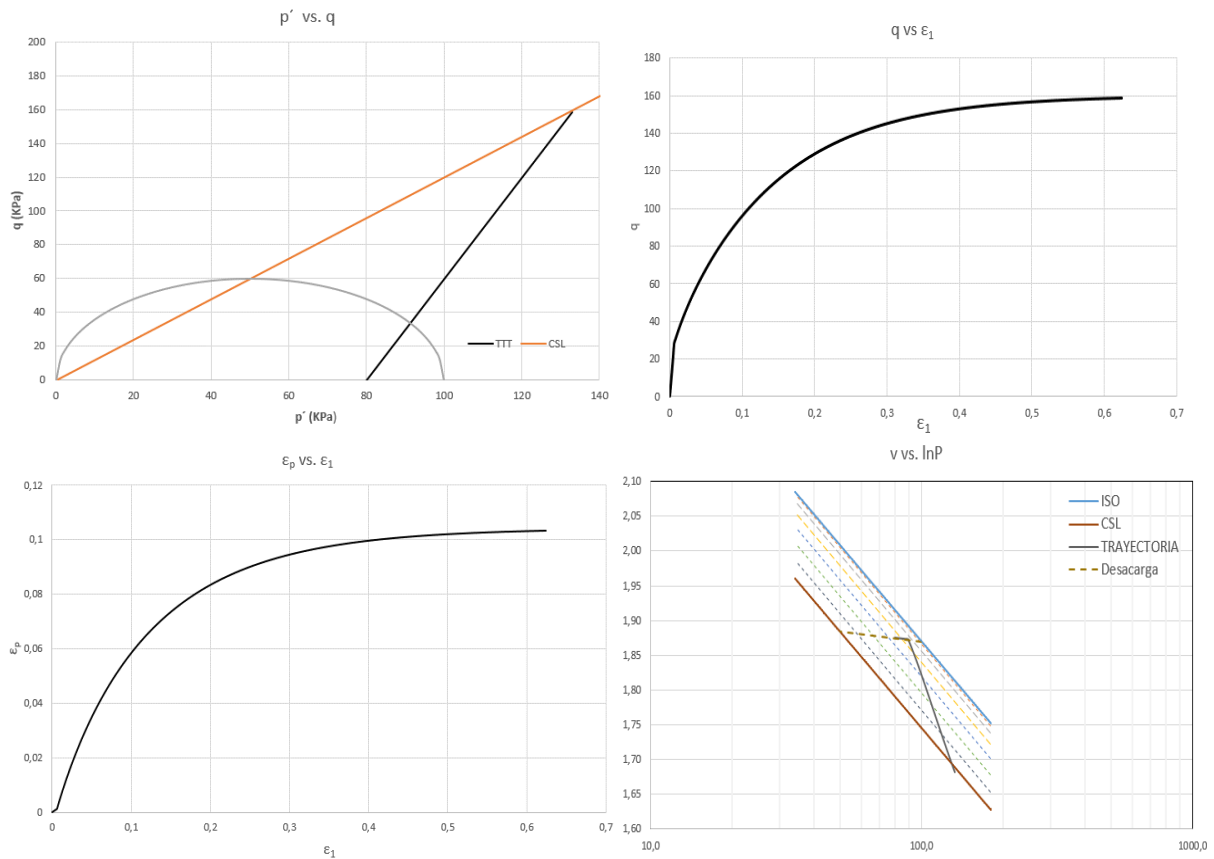


Figura 3.2. Resultados para el caso 01, CD, SC, $p'_{\text{inicial}} = 80 \text{ kPa}$.

Como se observa en la Figura 3.2 la muestra desarrolla deformaciones elásticas dentro de la superficie de fluencia, asimismo en la trayectoria de tensiones en el espacio q vs ε_1 , la pendiente inicial representa el Módulo de Young elástico, una vez que las tensiones de corte superan la superficie de fluencia, la muestra de suelo presenta deformaciones elastoplásticas hasta llegar finalmente a rotura. En el plano v vs. $\ln p'$ se observa claramente como la muestra parte desde la rama elástica, dado que se encuentra ligeramente sobreconsolidada para luego partir de la línea de compresión virgen hacia la línea de estados críticos, a medida que las deformaciones plásticas van progresando.

Caso 02: Suelo SC - Ensayo triaxial No drenado, la presión p'_{inicial} es de 80 KPa.

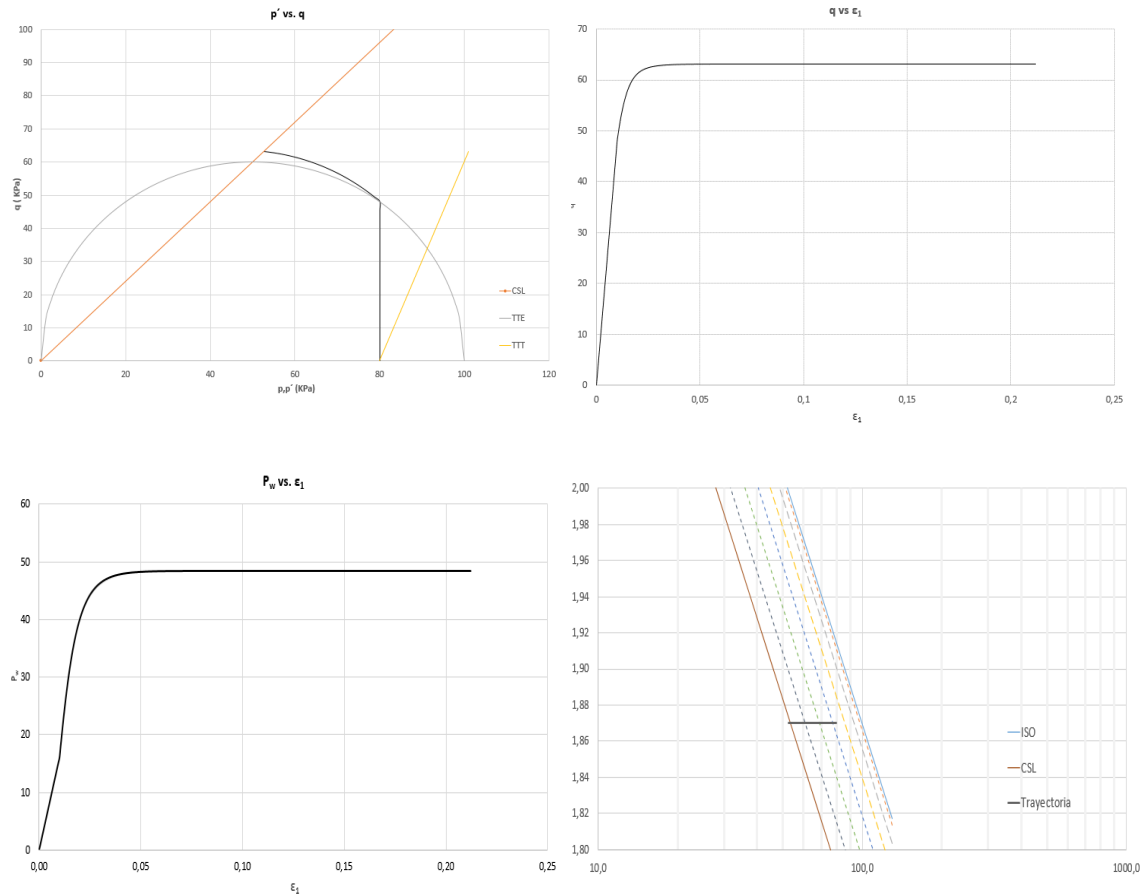


Figura 3.3. Resultados para el caso 02, CU, SC, $p'_{\text{inicial}} = 80 \text{ kPa}$.

La trayectoria para el caso 02 es de una muestra ligeramente sobreconsolidada, Figura 3.3, en condiciones no drenadas. Se parte desde la tensión en la rama isotrópica de 80 kPa, con lo cual dentro de la superficie de fluencia no desarrolla incrementos de tensión media. En definitiva, la trayectoria de tensiones efectivas solo presenta incremento del desviador. No obstante, las tensiones totales muestran la trayectoria ya conocida con pendiente 1:3, una vez la muestra de suelo iguala a la superficie de fluencia, se irá transportando esta superficie hasta llegar a rotura. Un punto importante a considerar es que durante el ensayo no se desarrollan deformaciones volumétricas, en otras palabras, no existirá variación de relación de vacíos, esto se refleja en espacio v vs. $\ln p'$ con el índice de poros constante.

Caso 03: Suelo NC – Ensayo triaxial Drenado, la presión p'_{inicial} es de 100 kPa.

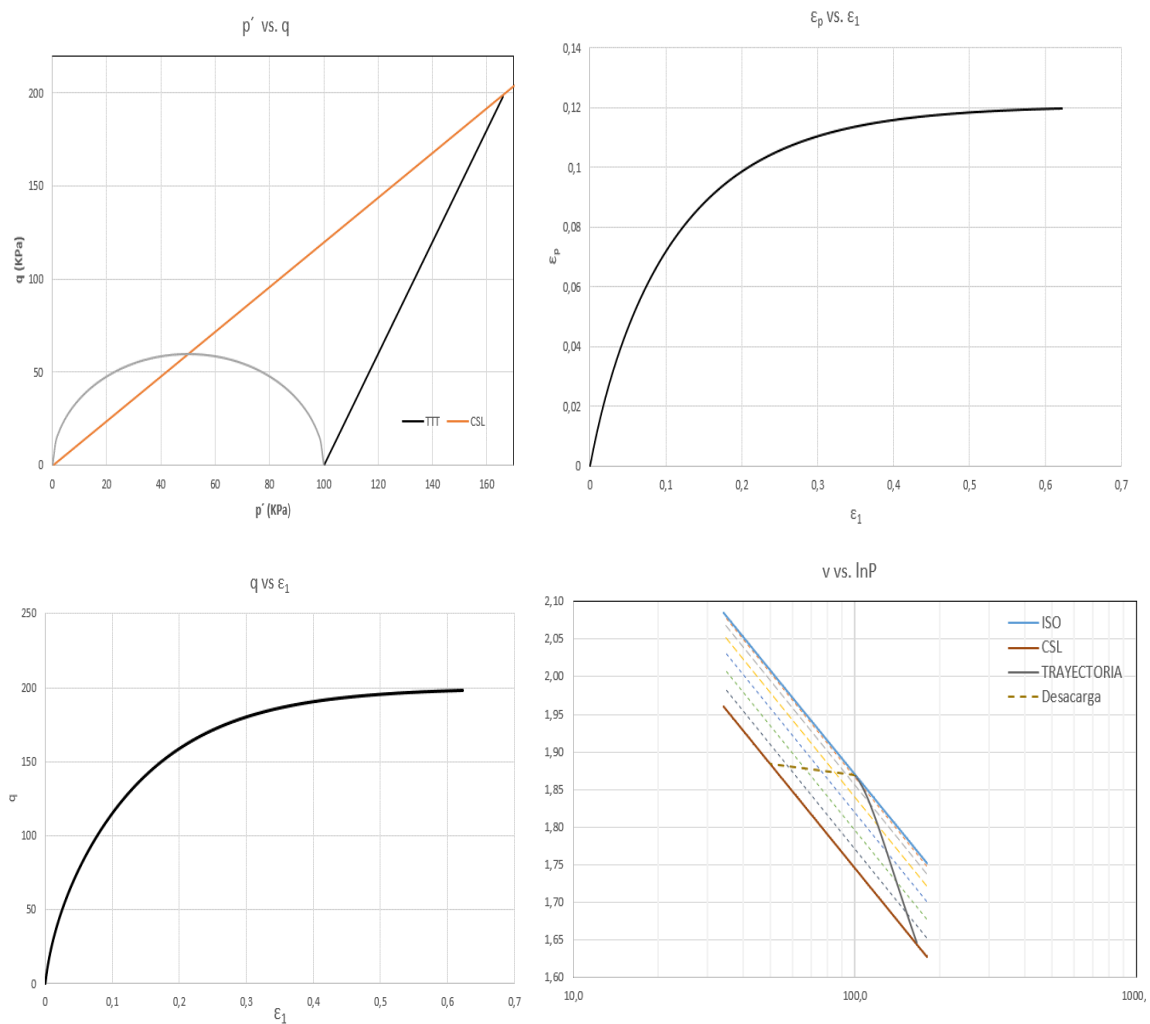


Figura 3.4. Resultados para el caso 03, CD, NC, $p'_{\text{inicial}} = 100 \text{ kPa}$

En este caso se evaluó una muestra de suelo normalmente consolidada Figura 3.4 en la que se muestra una trayectoria de tensiones totales con pendiente 1:3, así como un endurecimiento progresivo de la muestra, desarrollándose evidentemente deformaciones elastoplasticas que denotan un comportamiento contractante e irán empujando la superficie de fluencia, así a medida que progresan las tensiones de corte la relación de vacíos va disminuyendo, finalmente llega a la línea de estados críticos.

Caso 04: Suelo NC – Ensayo triaxial no drenado, la presión p'_{inicial} es de 100 kPa.

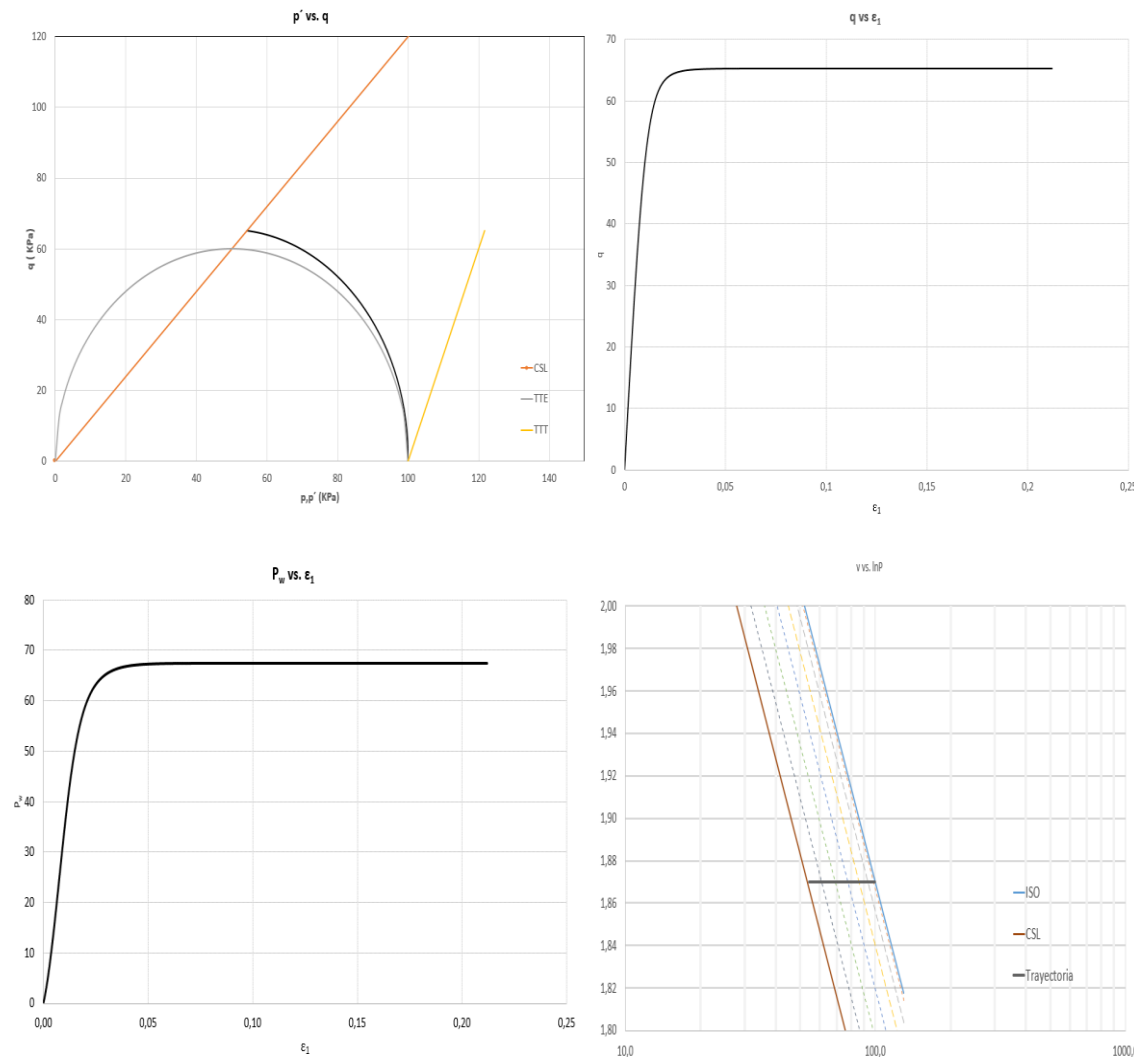


Figura 3.5. Resultados para el caso 04, CU, NC, $p'_{\text{inicial}} = 100 \text{ kPa}$

En el caso 04 en donde la trayectoria de tensiones efectivas, en función al aumento de las presiones de poros, la nueva superficie de fluencia se moverá hasta llegar finalmente a la línea de estados críticos. La presión de poros es evidente que a medida que las tensiones aumentan irá progresando, hasta alcanzar un punto en que se mantenga estable y es cuando la muestra haya llegado a la línea de rotura ver en la Figura 3.5. Paralelamente y como era de esperarse se observa que no existe una variación en la relación de vacíos, manteniéndose constante, lo cual refleja la condición impuesta en el modelo en el que no habrá variación de deformaciones volumétricas.

Caso 05: Suelo muy SC – Ensayo triaxial drenado, la presión p'_{inicial} es de 20 kPa.

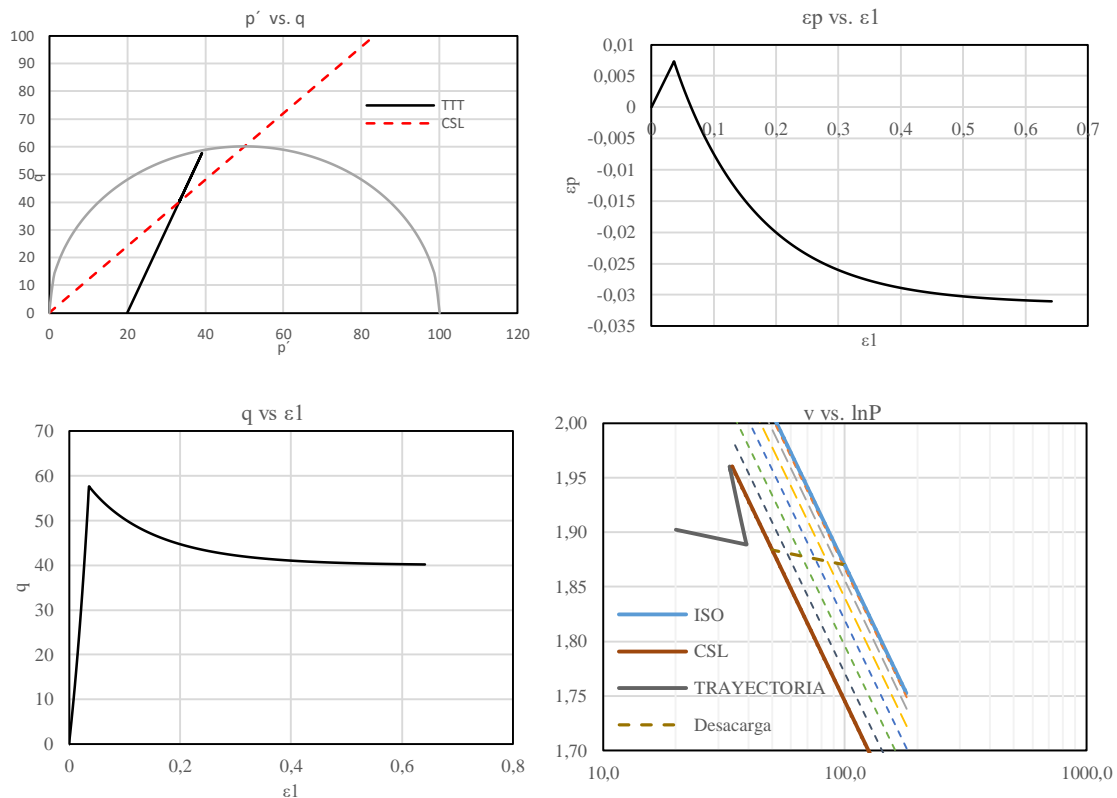


Figura 3.6. Resultados para el caso 05, CD, SC, $p'_{\text{inicial}} = 20$ kPa.

El caso 05 en donde la trayectoria de tensiones p' - q dentro de la superficie de fluencia, se encuentra en el rango elástico, una vez que la trayectoria de tensiones pretenda mover la superficie de fluencia, el modelo hará que éstas tensiones se dirijan a la superficie de falla con pendiente M (Figura 3.6). En definitiva, el suelo, exhibirá un comportamiento de endurecimiento, para luego una vez que toque la superficie de fluencia se reblandezca, teniendo una tensión desviadora pico y otra residual, lo que se aprecia claramente en el espacio q - ϵ_l . La deformación volumétrica presenta una zona elástica contractante para luego dilatar conforme la deformación axial se desarrolla a lo largo del ensayo. Paralelamente se observa que en el espacio v - $\ln p'$ existe una reducción de la relación de poros (zona elástica contráctate) para luego incrementar la relación de vacíos dentro de la muestra (dilatante) hasta finalmente llegar a la línea de estados críticos.

Caso 06: Suelo muy SC – Ensayo triaxial No Drenado, la presión p'_{inicial} es de 20 kPa.

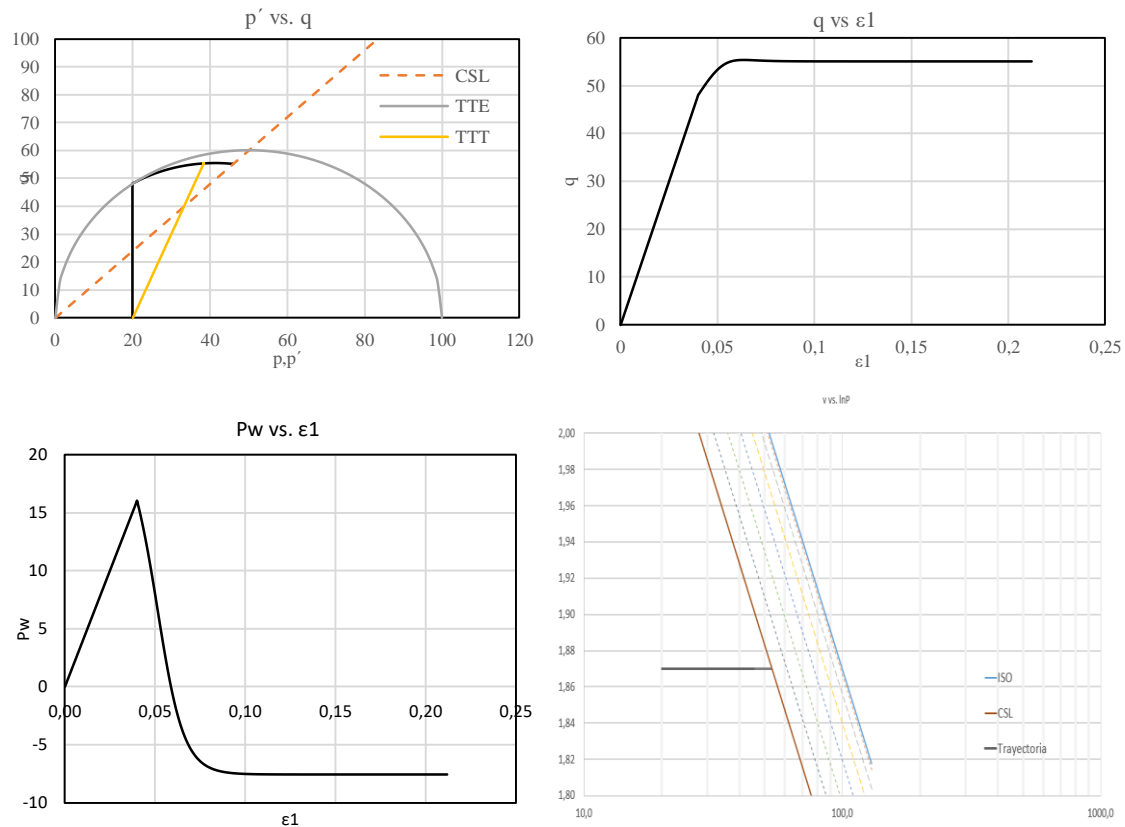


Figura 3.7. Resultados para el caso 06, CU, SC, $p'_{\text{inicial}} = 20$ kPa.

El caso 06 se muestra en la Figura 3.7, en donde la trayectoria de tensiones p' - q dentro de la superficie de fluencia (zona elástica) no desarrolla incremento de tensiones principales efectivas, teniendo una trayectoria vertical hasta encontrarse con la superficie de fluencia. Posteriormente las tensiones efectivas se desplazan hacia la superficie de rotura. Es claro observar que las tensiones totales muestran la pendiente típica 1:3. La trayectoria de tensiones q - ϵ_1 muestra una ligera tensión de pico debido al coeficiente asignado como input ($\kappa=0.02$). Asimismo, la evolución de las presiones de poros muestra una zona de aumento de presiones de poros, zona elástica, sin embargo, una vez que supera una deformación axial de 4% las presiones de poros decrecen como es de esperarse, por encontrarse muy sobreconsolidada la muestra. Por otro lado, y como forma de verificación se observa en el espacio v - $\ln p'$ que no existe variación en la relación de vacíos de la muestra, con ello se verifica que la deformación volumétrica de la muestra de suelo no varía.

3.2 IMPLEMENTACIÓN DEL BARCELONA BASIC MODEL (BBM).

La utilización de herramientas numéricas, capaces de reproducir el comportamiento de los suelos no saturados a través de modelos constitutivos, es un apoyo valioso en el campo de la investigación, la simulación numérica del comportamiento permite predecir sus deformaciones y tensiones finales de ensayos experimentales.

La capacidad del modelo numérico se ha evaluado según las siguientes tareas:

- Evaluar y comparar la predicción numérica propuestas en el artículo de (Alonso et al., 1990), trayectorias tensionales isotrópicas de carga y descarga con succión controlada.
- Evaluar y comparar la predicción numérica con los resultados experimentales de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018) utilizando una generalización a tres dimensiones del modelo BBM.
- Utilizar el BBM bajo tensiones generalizadas para predecir el efecto de q en el comportamiento del suelo cuando se satura manteniendo las tensiones p y q constantes, para valores de $b=0.0, 0.5$ y 1.0 .

En la Figura 3.8 se presenta el esquema resumen del diagrama de flujo del programa utilizado para reproducir el BBM. En el Anexo se incluye el listado del programa en MATLAB utilizado en los cálculos.

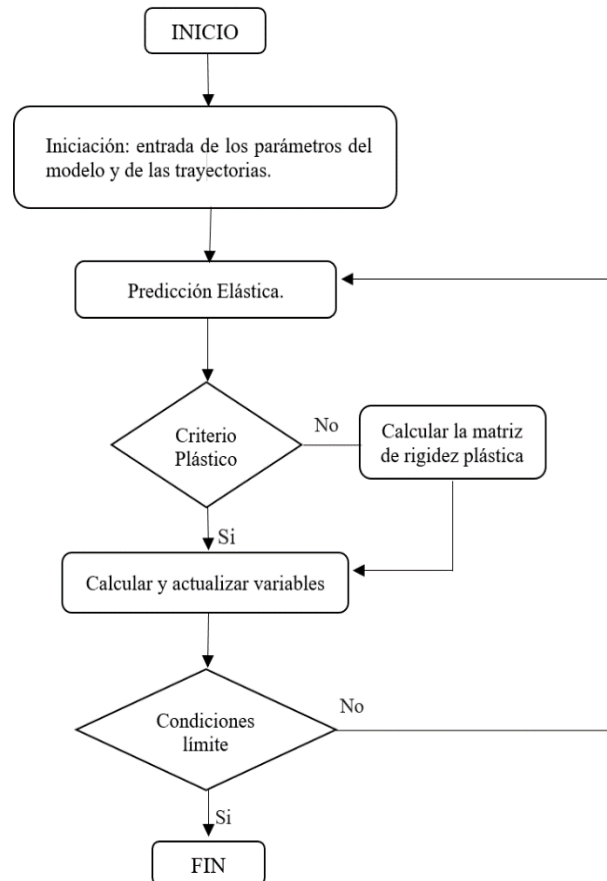


Figura 3.8. Diagrama de Flujo para la implementación del modelo BBM.

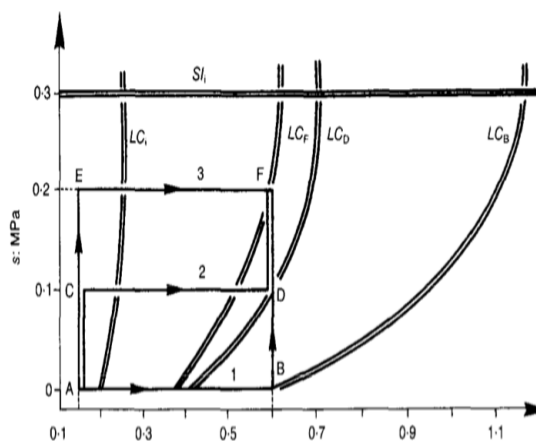
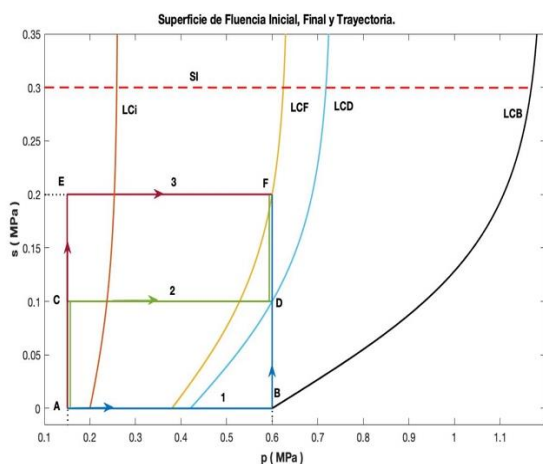
3.2.1. COMPROBACION DEL MODELO BBM PARA TRAYECTORIAS TENSIONALES ISÓTROPAS DE CARGA Y DESCARGA CON SUCCION CONTROLADA.

Para evaluar el desempeño del modelo BBM, se hizo mediante la comparación de dos casos presentados en el artículo (Alonso et al., 1990). Los parámetros de ingreso se muestran en la Tabla 4. En el primer caso se reproducen unas trayectorias tensionales isótropas de carga con aumento de la succión Figura 3.9 (a). La comparación de los resultados obtenidos con los publicados por Alonso et al, (1990) se puede ver en la Figura 3.9 (b).

En el segundo caso se reproducen unas trayectorias tensionales isótropas de carga con reducción de la succión, Figura 3. 10 (a). La comparación de los resultados se muestra en la Figura 3. 10 (b).

Tabla 4. Parámetros de ingreso para reproducir el modelo BBM.

PARAMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR	UNIDAD
p^*_0	Presión de preconsolidación inicial en estado saturado	0,2	-
M	Pendiente línea de estado crítico	1	-
$\lambda_{(0)}$	Parámetro de rigidez para cambios de tensión de media para estado virgen del suelo	0,2	-
κ	Parámetro de rigidez elástica para cambios de tensión media	0,02	-
e_0	Índice de poros inicial	0,9	-
G	Módulo de corte	10	MPa
Pc	Presión de referencia	0,1	MPa
$\lambda_{(s)}$	Parámetro de rigidez para cambios de succión en estado virgen del suelo	0,08	-
κ_s	Parámetro de rigidez elástica para cambios de succión	0,008	-
r	Parámetro que define la rigidez máxima del suelo	0,75	-
β	Parámetro que controla el aumento de la rigidez del suelo con la succión	12,5	MPa ⁻¹
k	Parámetro que controla el aumento de la cohesión del suelo con la succión	0,6	-
S ₀	Parámetro de endurecimiento de la superficie de fluencia por aumentos de succión	0,300	MPa
Pat	Presión atmosférica	0,1	MPa



(a)

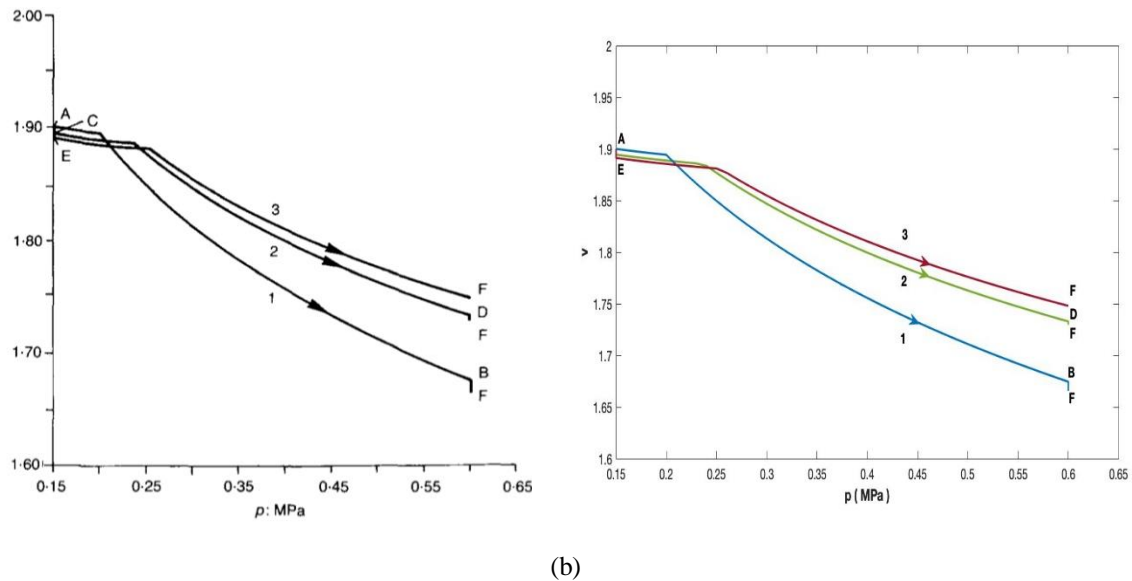


Figura 3.9 (a) Trayectorias tensionales isotópicas cambios de carga y succión. (b) Volumen específico vs tensión media neta, a la izquierda gráfica mostrada en (Alonso, et al., 1990) y a la derecha la desarrollada con el modelo BBM.

Las trayectorias propuestas en la Figura 3.9 (a) para las tres muestras (1, 2, 3) comienzan en un punto común A, se cargan y secan en tres diferentes secuencias hacia el punto final F. La muestra 1, cargada en condiciones saturadas, desplaza la curva LC de rendimiento a la posición LC_B , y entonces experimenta una disminución elástica en volumen cuando la succión se incrementa de B a F. Esta muestra experimenta la mayor deformación volumétrica de las tres. En la trayectoria 3, la succión aplicada de A hacia E provoca compresión a la muestra y un aumento de rigidez. El camino EF desplaza a LC de rendimiento a la posición final LC_F . Experimentará la deformación volumétrica más pequeña como se ve en la Figura 3.8 (b). Ello indica que los caminos que implican el secado antes de la carga conducen a deformaciones menores que los que secan la muestra después de la carga.

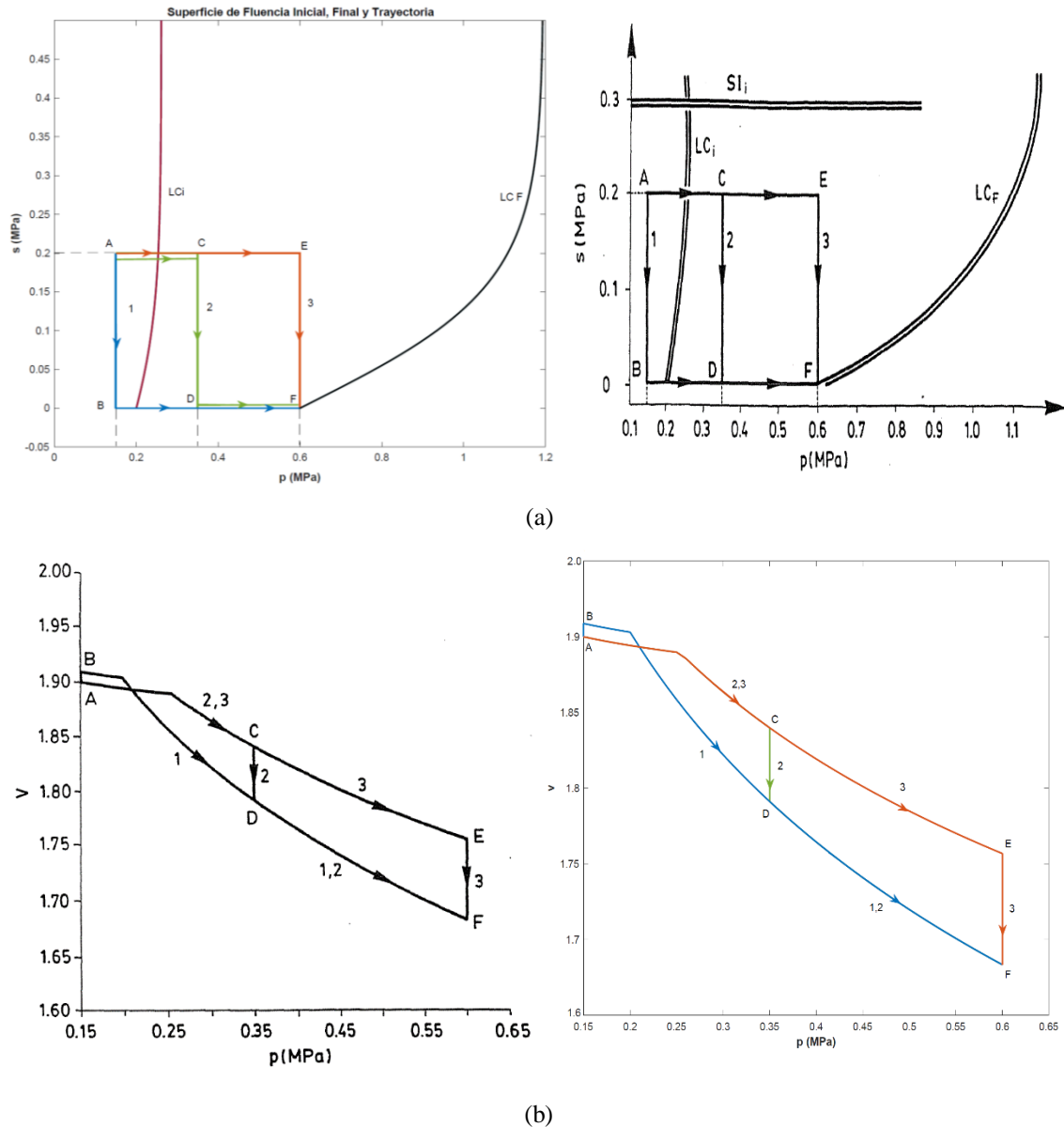


Figura 3. 10 (a) Trayectorias tensionales isotropas cambios de carga y succión. (b) Volumen específico vs tensión media neta, a la izquierda gráfica mostrada en (Alonso, et al., 1990) y a la derecha la desarrollada con el modelo BBM.

En el segundo caso, según se desprende de la Figura 3.10 (a) los tres caminos de saturación AB, CD y EF, desarrollan para tres confinamientos diferentes (1, 2 y 3). El primer camino de humedecimiento (AB) tiene lugar dentro de la región elástica e induce una expansión continua. La segunda ruta de humedecimiento, CD, comienza una vez que se ha aplicado una compresión AC a la muestra. Durante la humectación, un colapso de la muestra comienza a principios de reducción de la succión. La ligera expansión elástica durante la ruta CD es más pequeña que la compresión inducida por el movimiento de la curva LC hasta su posición final. El tercer camino EF se desarrolla con un confinamiento más grande que produce un colapso mayor. La ruta DF después de humedecer 2 sigue la compresión saturada curva BDF.

3.2.2. RESULTADOS DEL BARCELONA BASIC MODEL (BBM) BAJO UN ESTADO GENERALIZADO DE TENSIONES.

Para evaluar el desempeño del modelo BBM bajo un estado generalizado de tensiones, se trató de reproducir resultados experimentales de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018). Se trata de tres ensayos de colapso con valores de p y q constantes y con valores de $b=0.0, 0.5$ y 1.0 respectivamente. Se reproduce una trayectoria tensional bajo un estado generalizado, con la disminución de succión, tal como se muestra en la Figura 3.11 y en la Figura 3.12. Los parámetros de ingreso se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Parámetros de ingreso para reproducir el modelo BBM bajo estado de tensión generalizada.

PARAMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR	UNIDAD
p^*_0	Presión de preconsolidación inicial en estado saturado	0,0097	-
$\lambda_{(0)}$	Parámetro de rigidez para cambios de tensión de media para estado virgen del suelo	0,085	-
κ	Parámetro de rigidez elástica para cambios de tensión media	0,009	-
e_0	Índice de poros inicial	0,72	-
G	Módulo de corte	157	MPa
P_c	Presión de referencia	0,0004	MPa
$\lambda_{(s)}$	Parámetro de rigidez para cambios de succión en estado virgen del suelo	0,085	-
κ_s	Parámetro de rigidez elástica para cambios de succión	0,008	-
r	Parámetro que define la rigidez máxima del suelo	0,65	-
β	Parámetro que controla el aumento de la rigidez del suelo con la succión	30	MPa ⁻¹
k	Parámetro que controla el aumento de la cohesión del suelo con la succión	0,008	-
S_0	Parámetro de endurecimiento de la superficie de fluencia por aumentos de succión	10	MPa
P_{at}	Presión atmosférica	0,1	MPa
φ	Angulo de rozamiento	29,6	-

Para un estado generalizado de tensiones la pendiente del estado critico M es calculada con la ecuación de (Argyris *et al.* 1974) (Ecuación 27) que está en función de ángulo de Lode θ , alternativamente, del parámetro b .

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en el cálculo mediante una serie de gráficas, (Figuras 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16). Estos resultados serán analizados en el Capítulo siguiente.

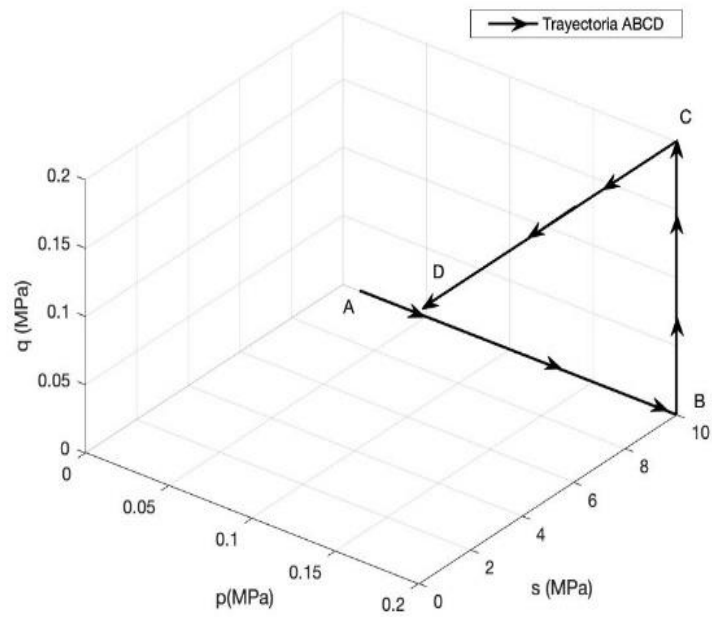


Figura 3.11. Trayectoria bajo el estado generalizado de tensiones, cambios de carga y succión.

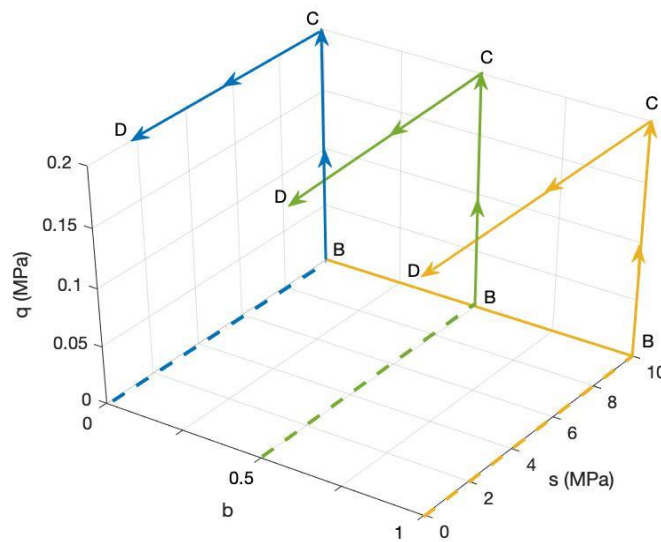


Figura 3. 12 Trayectorias de tensiones a diferentes valores de b .

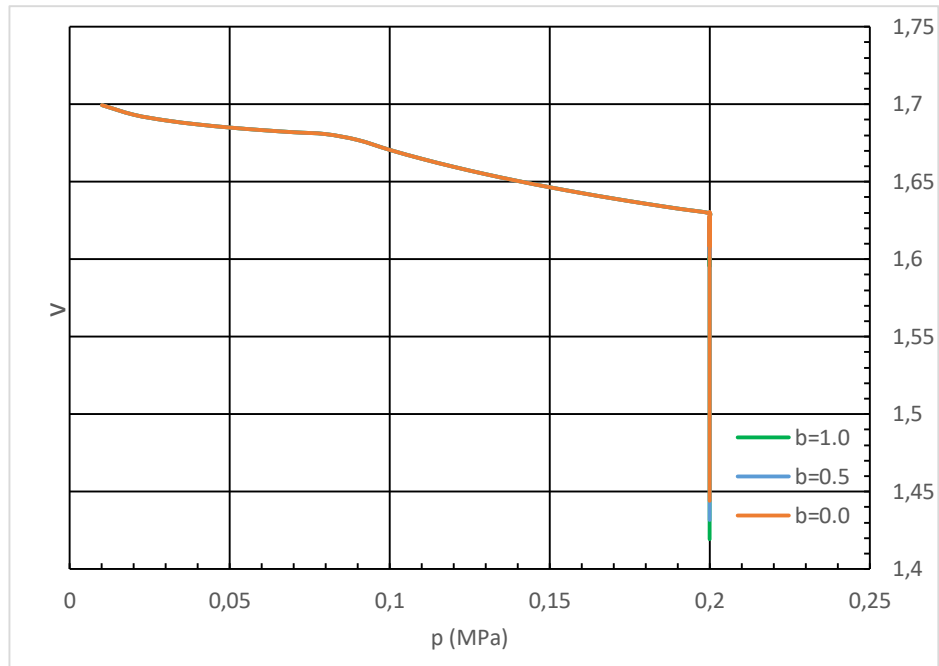


Figura 3.13 Cambio de volumen específico en función del incremento de tensión neta para diferentes valores de b .

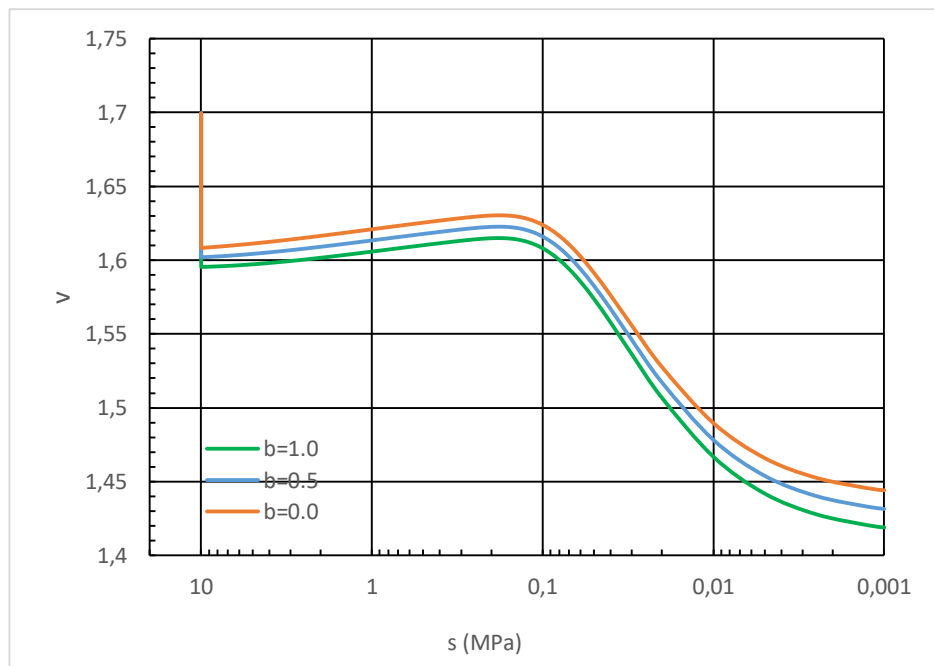


Figura 3.14 Cambio de volumen específico en función de la disminución de succión para diferentes valores de b .

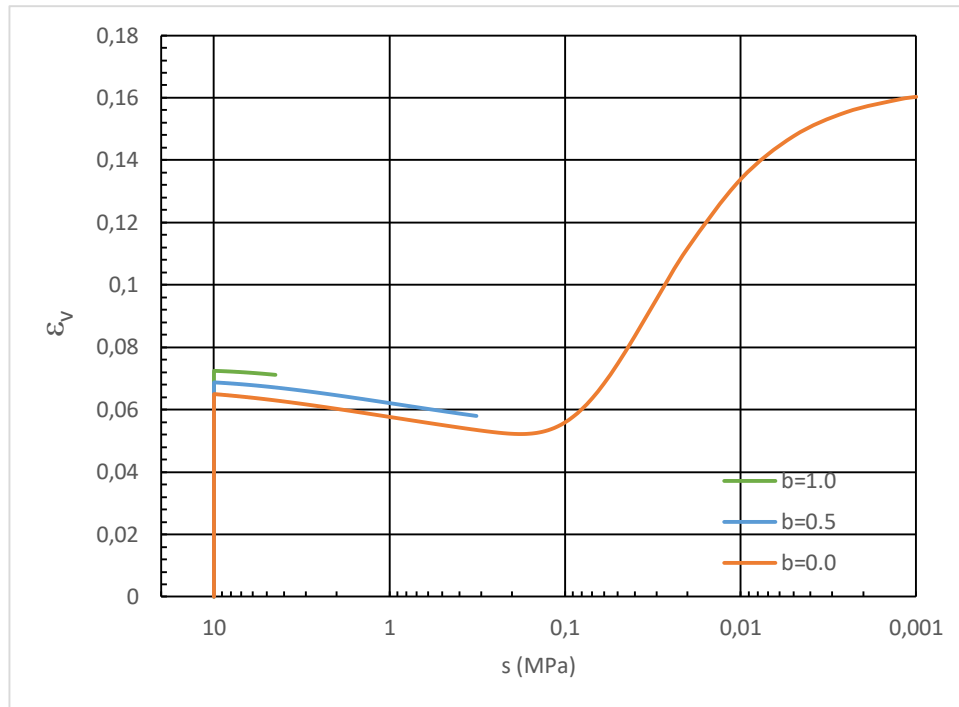


Figura 3.15 Cambio de deformación volumétrica en función de la disminución de succión para diferentes valores de b .

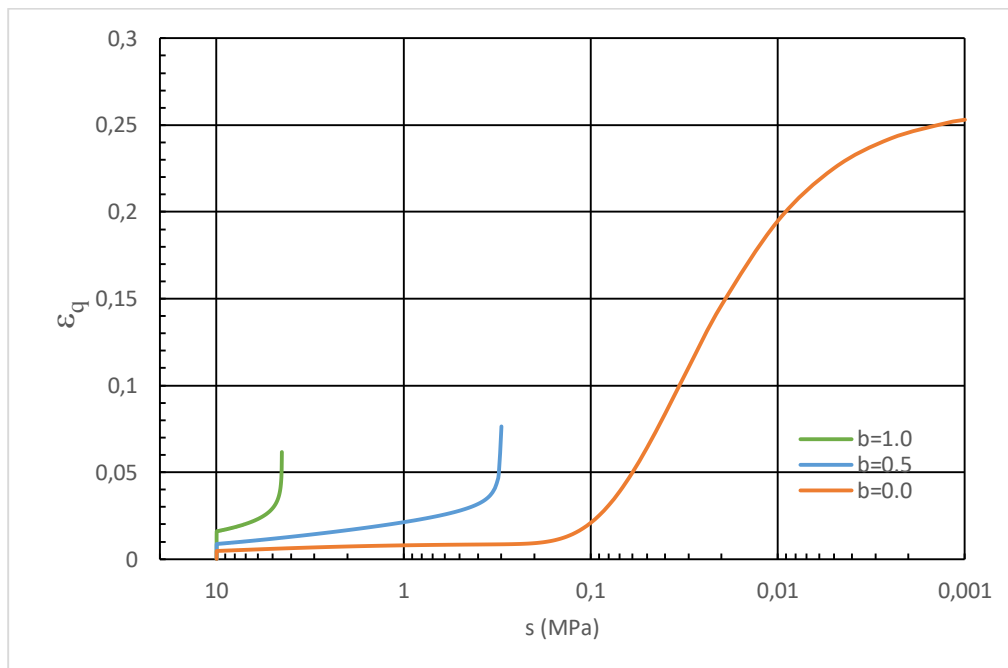


Figura 3.16 Cambio de deformación de corte en función de la disminución de succión para diferentes valores de b .

4.INTERPRETACION DE RESULTADOS.

En el presente capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos con la utilización del modelo BBM en la modelización de ensayos de saturación bajo confinamiento y desviador constante, pero bajo estados tensionales con distinto ángulo de Lode.

En primer lugar, se han considerado las pendientes M de las líneas de estado crítico para diferentes valores del ángulo de Lode. Seguidamente se han comparado los cambios de deformación volumétrica en función de la disminución de succión obtenidos numéricamente y experimentalmente (Cárdenas, 2018). Se han analizado también los cambios de deformación de corte en función del cambio de succión. Se han considerado las trayectorias indicadas anteriormente con los valores de $b=0.0$, 0.5 , y 1.0 , tal como se han mostrado en la Figura 3.11.

Finalmente, se modelizaron los siguientes casos de trayectorias para ver el efecto conjunto de q y de b en el comportamiento del suelo cuando se satura bajo carga:

- $p=200\text{MPa}$, $q = 0$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$. (caso isótropo)
- $p=200\text{MPa}$, $q=100\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$.

4.1. ANÁLISIS DE LÍNEA DE ESTADO CRÍTICO.

En la definición propuesta por (Wood, 1990) se describe a la línea de estado crítico (LEC) como la relación entre la tensión de corte y la tensión media que define la pendiente de M que establece la superficie de rotura del material, manteniendo el volumen constante:

$$M = \eta_{cs} = \frac{q}{p'}$$

La envolvente de rotura para diversas humedades (succiones) se puede dibujar a partir del valor de la cohesión efectiva que se puede obtener en ensayos de corte directo sobre muestras no saturadas como describe (Cárdenas, 2018). El punto de partida de la recta para un valor de $q=0$ representa la resistencia a tracción pura y está relacionado con el ángulo de rozamiento y la cohesión, como se ve en Figura 4.1.

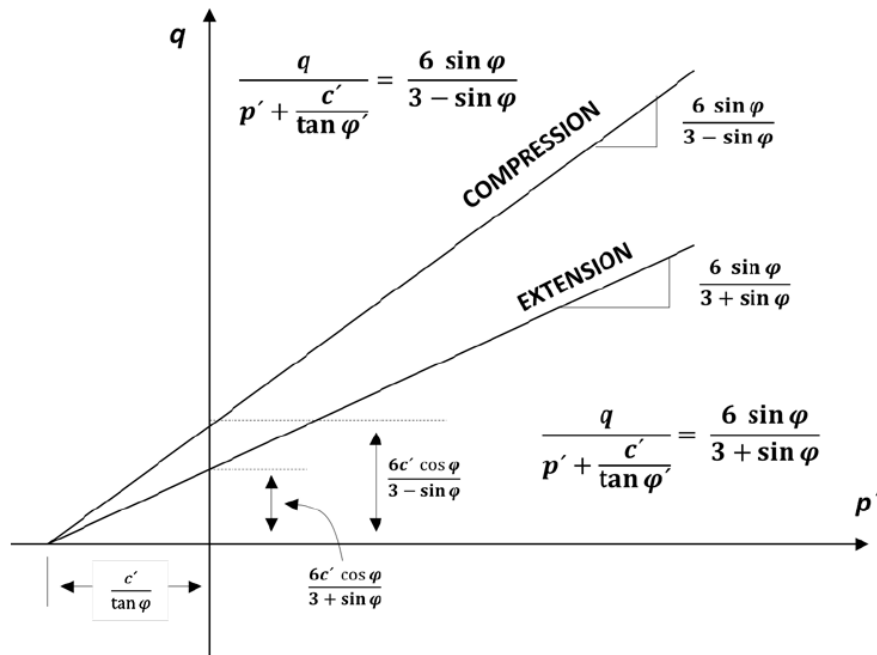


Figura 4.1 Representación en el plano p' - q de Cambridge de las ecuaciones de Mohr-Coulomb para la determinación de la LEC a compresión y extensión (Cárdenas, 2018).

El análisis para determinar el valor de M en función del ángulo de Lode (θ) se basa en la ecuación escrita por Mohr-Coulomb que se presentó en capítulo 2 ecuación 27.

Se presenta la comparación de gráficas de las líneas de estado crítico obtenidas experimentalmente (Cárdenas, 2018) y las utilizadas en el modelo numérico para diferentes valores de b igual a 0.0, 0.5, y 1.0 con succión controlada en la figura 4.2. La variación de M en función del ángulo de Lode se presenta en la figura 4.3.

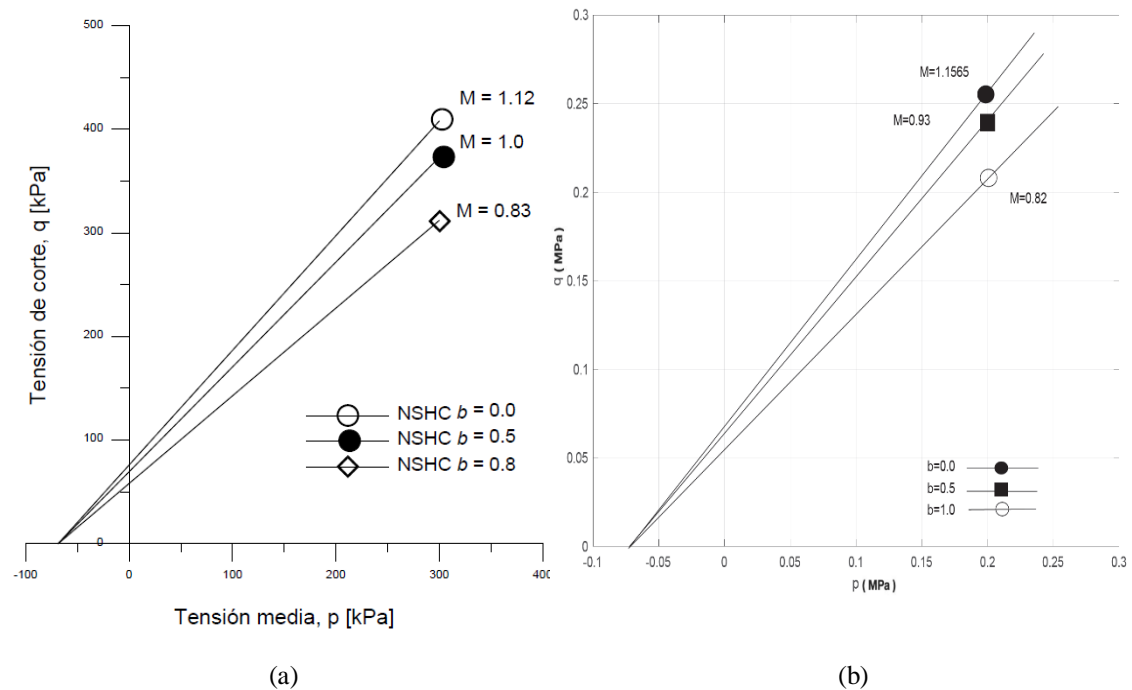


Figura 4.2(a) Desarrollo de las Líneas de estado crítico en ensayos no saturados de ensayos de colapso para valores de $b=0.0$, 0.5 y 1.0 , de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018). (b) Desarrollada con el modelo BBM en MatLab.

En la Figura 4.2 se presentan en forma conjunta los valores obtenidos de los ensayos de laboratorio frente a valores determinados en función de las ecuaciones presentadas en la literatura para tener en cuenta la influencia de la variación del parámetro b en las LEC. Se han considerado muestras no saturadas, con un valor de succión aproximado de 10 MPa. En las figuras, se puede observar que las LEC guardan una gran similitud en cuanto a la pendiente M comparados los resultados para valores de $b = 0.0$, 0.5 y $b = 1.0$. En la Figura 4.3 se observa el comportamiento del valor de M en función de la variación del ángulo de Lode θ , que es otra forma en que se puede representar la influencia de la tensión principal intermedia.

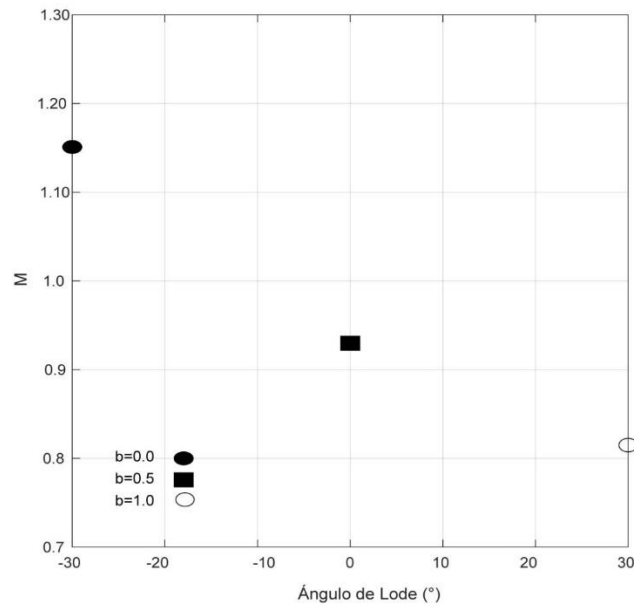
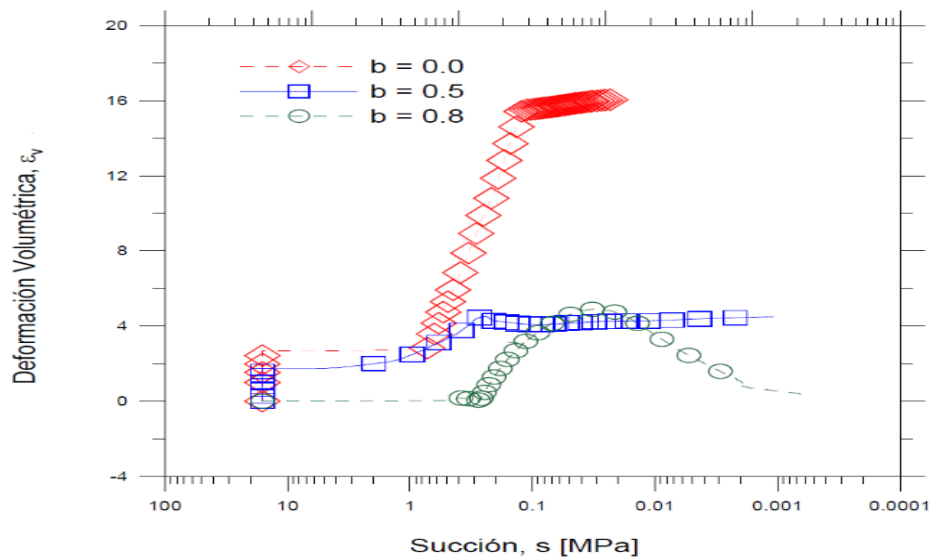


Figura 4.3. Comportamiento de M en función del ángulo de Lode (influencia de la tensión principal intermedia, σ_2).

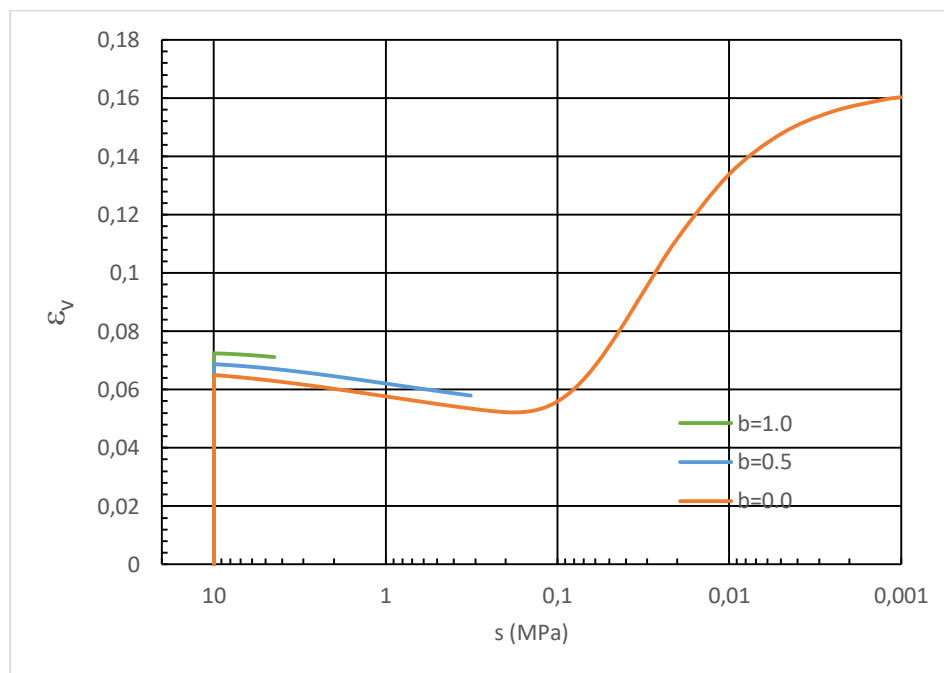
4.2. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION VOLUMETRICA DE COLAPSO PARA DIVERSOS VALORES DE b COMPARACIÓN CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.

(Cárdenas, 2018) llevó a cabo ensayos en muestras no saturadas para determinar las características de respuesta del equipo bajo diversas condiciones. Se estableció las trayectorias con p y q constantes bajo diferentes valores del parámetro b y del ángulo de Lode (θ).

Para la modelación del cambio de deformación volumétrica en función del incremento de succión (ε_v -s), se siguieron las trayectorias mencionadas anteriormente. En la Figura 4.4 se presenta la comparación de los resultados obtenidos con el modelo desarrollado con los resultados obtenidos en la campaña experimental de (Cárdenas, 2018), para las trayectorias propuestas.



(a)



(b)

Figura 4.4. (a) Deformación volumétrica contra succión para valores de $b=0.0$, 0.5 y 1.0 , de la campaña experimental de (Cárdenas, 2018). (b) Simulación obtenida con el modelo BBM.

En la Figura 4.4 el ensayo de $b=0.0$ presenta un incremento importante de los valores de ε_v (deformación volumétrica), en los ensayos de $b=0.5$ $b=1.0$ la muestra rompe antes de llegar a succión nula, gran parte de la deformación volumétrica prácticamente permanece constante, la deformación volumétrica aumenta en el caso $b=0.0$ cuando se acerca a la succión nula. Hay que tener en cuenta que el estado del suelo durante la saturación está muy próximo a la LEC y por tanto van a predominar las deformaciones de corte sobre las volumétricas.

4.3. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION VOLUMETRICA DE COLAPSO PARA DIVERSOS VALORES DE b EFECTO DEL DESVIADOR.

Para evaluar el efecto de la tensión desviadora se han repetido los cálculos precedentes con diversos valores del parámetro b , pero saturando el suelo con valores de $p=200$ kPa y de $q=0$ y $q=100$ kPa.

A continuación, en la Figura 4.5 y la Figura 4.6 se presenta los resultados obtenidos en la reproducción del modelo BBM para los casos propuestos. Obviamente se puede observar que el efecto de b es nulo para el caso isótropo. Por otra parte, se puede observar que las deformaciones volumétricas tras el colapso aumentan claramente con el valor del desviador aplicado durante el periodo de saturación.

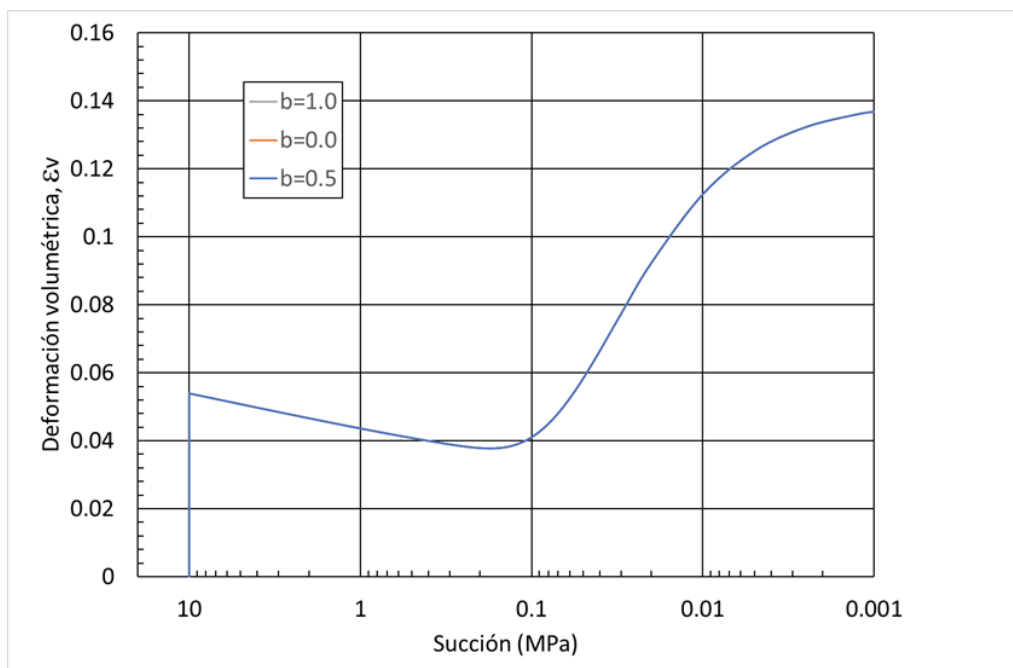


Figura 4.5. Cambios de la deformación volumétrica en función del incremento de succión para la trayectoria $p=0$ hasta $p=200$ MPa, $q=0$, $s=10$ MPa hasta $s=0$ para diferentes valores de b .

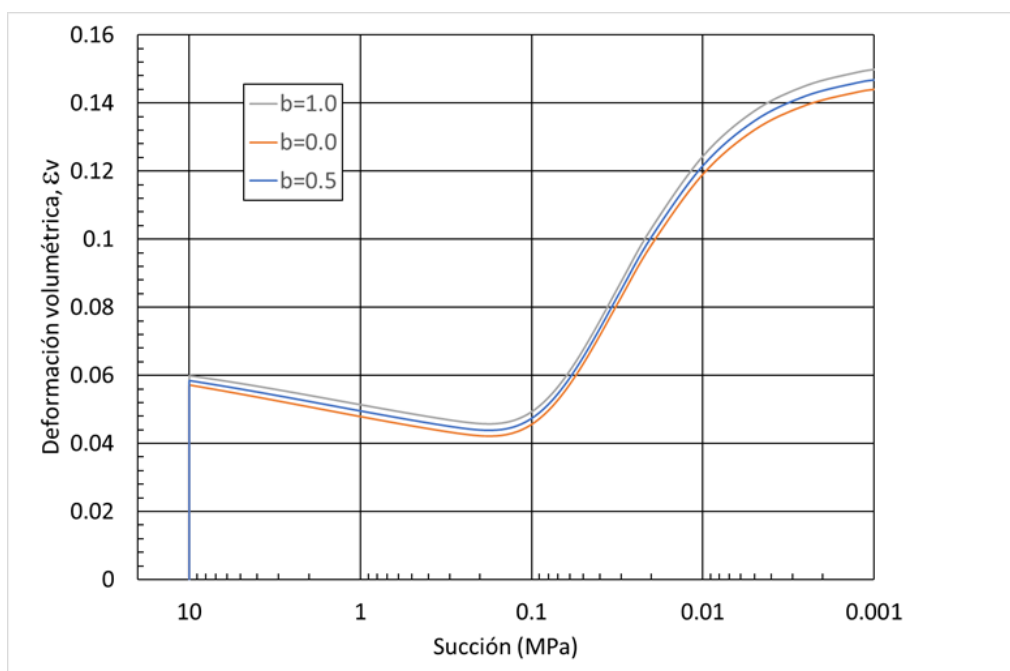


Figura 4.6. Cambios de la deformación volumétrica en función del incremento de succión en la trayectoria $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=100\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .

4.4. ANÁLISIS DE LA DEFORMACION DE CORTE EN FUNCION DEL INCREMENTO DE SUCCION PARA DIFERENTES VALORES DEL PARAMETRO b Y DEL DESVIADOR

En la Figura 4.7 se puede observar que para los valores de $b=1.0$ y $b=0.5$ se presenta un incremento importante de la deformación de corte al reducir la succión a cero, llegando a la rotura de la muestra a corte antes de su saturación total., dado que la envolvente de rotura está más próxima al estado tensional de la muestra. En la Figura 4.9 se presenta deformaciones de corte negativos ya que la muestra está muy sobreconsolidada.

El modelo desarrollado permite evaluar el efecto del desviador aplicado y del valor del parámetro b en las deformaciones de corte durante la fase de saturación de la muestra. La Figura 4.7 muestra cómo se llega a la rotura por deformación de corte antes de llegar a la saturación para valores de $b=1.0$ y $b=0.5$ ya que el desviador aplicado es alto ($q=200\text{ kPa}$) y el punto representativo del estado tensional del suelo está muy cerca de la envolvente de rotura. Para $b=0.0$, dado que la resistencia al corte es algo mayor, no se llega a la rotura, aunque las deformaciones de corte son muy altas.

En la Figura 4.8 puede observarse que para un desviador aplicado de 100 kPa, que está lejos de la condición de rotura, las deformaciones de corte son menores. También se aprecia que las deformaciones son mayores a medida que crece el parámetro b . En la Figura 4.9 se comprueba que, si el desviador aplicado es nulo, las deformaciones durante la fase de saturación son isotrópicas.

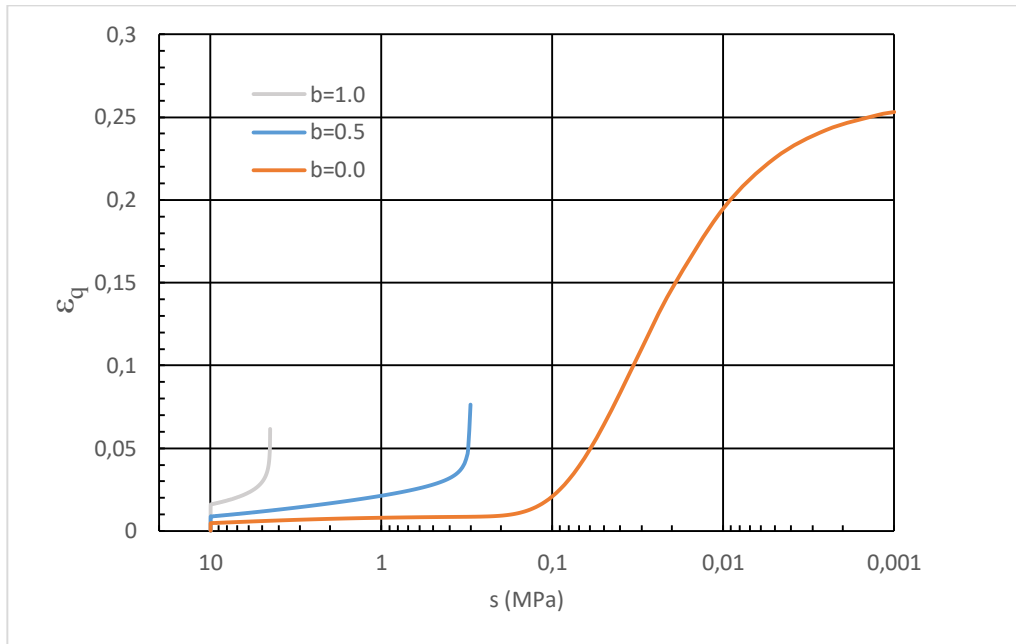


Figura 4.7. Deformación de corte con cambio de succión en la $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=200\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .

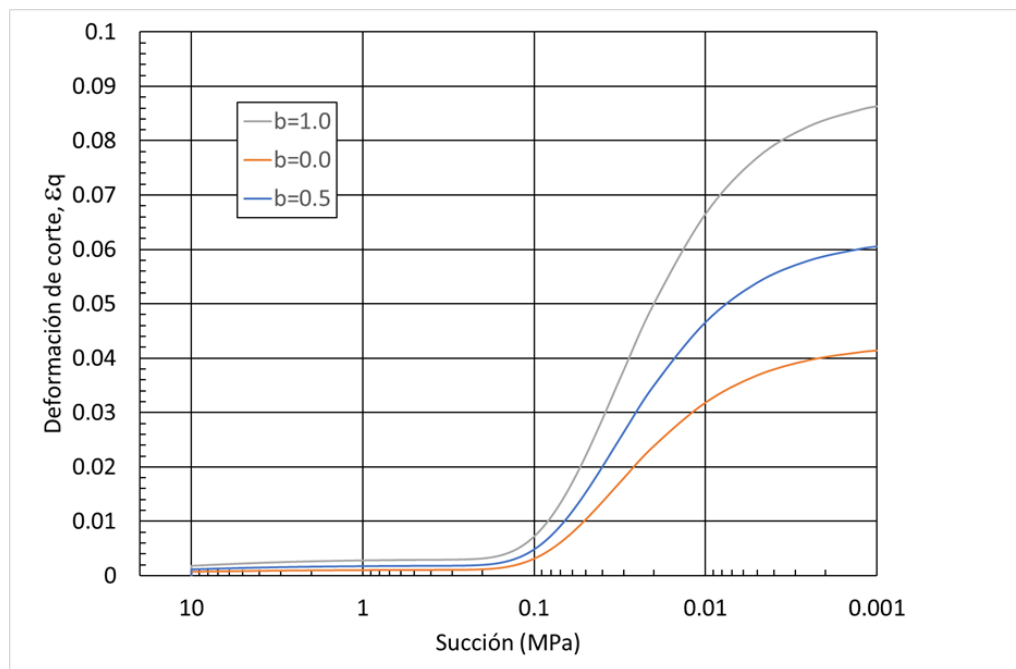


Figura 4.8. Deformación de corte con cambio de succión en la trayectoria $p=0$ hasta $p=200\text{MPa}$, $q=0$ hasta $q=100\text{MPa}$, $s=10\text{MPa}$ hasta $s=0$ para diferentes valores de b .

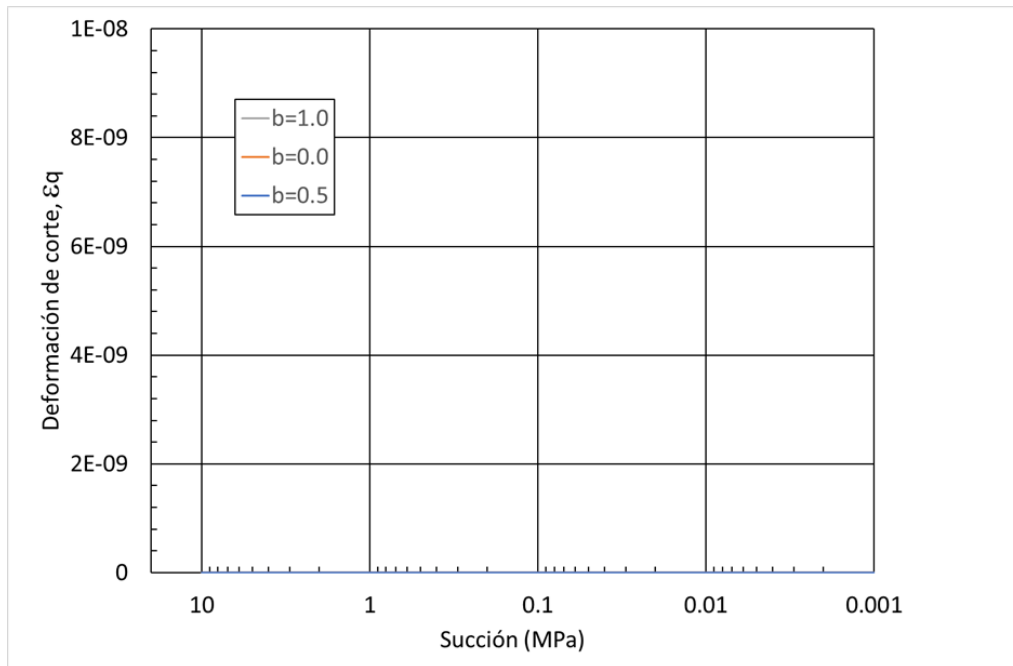


Figura 4.9. Deformación de corte con cambio de succión en la trayectoria $p=200$ MPa, $q=0$ MPa, $s=10$ MPa hasta $s=0$ para diferentes valores de b .

5. CONCLUSIONES LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Se desarrolló la modelación numérica del modelo Cam Clay Modificado (MCCM) para suelos saturados y el modelo Barcelona Basic Model (BBM) para suelos no saturados. Este último modelo se extendió al caso de tensiones generalizadas sobre el suelo y con él se simuló la parte mecánica de los ensayos de laboratorio realizados por Cárdenas (2018). Las conclusiones generales de la modelación numérica desarrolladas se presenta a continuación:

El modelo MCCM reproduce las pautas de comportamiento más representativas suelos saturados ensayadas en ensayos triaxiales, en condiciones drenadas y no drenadas, tanto para suelos normalmente como sobreconsolidados. Esto se ha podido apreciar en los 6 casos esquemáticos presentados.

Las hipótesis descritas inicialmente (plasticidad asociada, rigidización isotrópica y la rigidización dependiente de las deformaciones plásticas) se cumplen dentro de la implementación del modelo.

El modelo no reproduce el cambio de comportamiento suave que se aprecia cuando la muestra llega a una resistencia pico y luego pasa a una zona de reblandecimiento, como es el caso de los suelos muy sobreconsolidados, donde cuando la muestra pasa de un comportamiento contráctate (elástico) a dilatante (elasto-plástico) presenta un cambio brusco.

El modelo BBM generalizado puede reproducir el comportamiento de suelos sometidos a un estado más generalizado de tensiones en ensayos triaxiales verdaderos o ensayos de cilindro hueco. El modelo incorpora los cambios de las pendientes de las líneas de estado crítico con el ángulo de Lode.

El modelo BBM generalizado se ha utilizado para estudiar el comportamiento del suelo cuando se satura bajo un estado tensional definido por un valor del desviador y del parámetro b . Se ha comprobado que, si el estado tensional del suelo está cerca de la envolvente de rotura, el suelo puede romper por deformación de corte antes de llegar a la saturación total. Por otra parte, se ha comprobado que si el parámetro b está cercano a la

unidad (estado de extensión) las deformaciones de corte y de volumen durante la saturación aumentan respecto al caso de $b=0$ (estado de compresión).

Por otra parte, se ha constatado que el efecto del parámetro b disminuye a medida que disminuye el desviador aplicado, siendo este efecto nulo en condiciones de carga isótropa.

Finalmente, hay que resaltar que el modelo desarrollado ha sido útil para reproducir los ensayos de saturación bajo carga realizados en el equipo de columna resonante por Cárdenas (2018).

Como líneas de trabajo abiertas cabe mencionar la aplicación del modelo realizado a la modelación de nuevos ensayos de laboratorio, el desarrollo de modelos que tengan en cuenta la anisotropía del comportamiento del suelo y el acoplamiento entre los cambios de deformación y de saturación en suelos no saturados.

6.BIBLIOGRAFIA

- Alonso, E., Gens, A., & Hight, D. W. (1987). Special Problem Soils . General Report . In proceedings of the 9th European Conference in soils mechanics and foundation Engineering (June) Dublin., Vol. 3, pp 1087–1146.
- Alonso, E., Gens, A., & Josa, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils ”. *Geotechnique* Vol. 40, No. 3, pp. 405-430.
- Alonso, E., Pinyol, N., & Gens, A. (2010). Geomechanics of Failures Advanced Topics. In Springer (Ed.), *Colapse of compacted soil:girona road embankments* (pp. 85–127). Barcelona.
- Argyris, J., Faust, G., Szimmat, J., Warkne, P. and William, K. (1974).” Recent development in finite elements analysis of prestressed concrete reactor vessels”. *Nuclear Engineering Design*. No. 28, pp. 42-75.
- Camacho Tauta, J. F., Reyes Ortiz, Óscar J., & Bueno Pumarejo, P. B. (2004). Utilización del modelo CAM-CLAY modificado en suelos cohesivos de la Sabana de Bogotá. *Ciencia E Ingeniería Neogranadina*, 14, 20-29.
- Cárdenas, O. E. (2018). Estudio del comportamiento de colapso en arenas arcillosas bajo un estado generalizado de tensiones, PhD. Tesis, Univercidad Politecnica de Catalunya, pp 305-335, Barcelona.
- Calladine, C. R. (1963). Correspondence on the yielding of clay. *Géotechnique*, Vol 13, No. 3, pp 250-255.
- Coulomb, C. A. (1776). Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. (Vol. 7). Paris: l'Imprimerie Royale.
- Cui, Y., & Delage, P. (1993). “Etude du comportement d’un limon compacté non saturé et de sa modélisation dans un cadre élasto-plastique”. PhD. Thesis, Ecole Nationale des Ponts at Chaussées, París.
- Drucker, D. (1953). Limit analysis of two and three-dimensional soil mechanics problems. *J.Mech. Phys. Solids*, Vol 1, 217-226.
- Drucker, D., Gibson, R., & Henkel, D. (1957). Soil mechanics and work hardening theories of. *Trans. ASCE*, Vol 122, 338-346.
- Drucker, D. C., & Prager, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Vol 10, 157–165.
- Gens, A., & Potts, D. . (1988). Modelos elasto-plasticos de estado critico para analisis numéricos de problemas geotécnicos y formulacion basica y principales modificaciones. *Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería*, 4, 497–522.
- Maaatouk, A., Leroueil, S., & La Rochelle, P. (1995). Yielding and critical state of a collapsible

unsaturated silty soil. *Geotechnique* 45, No 3, pp 465–477.

Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice Hall.

Olivella, X. O., & Carlos Agelet, S. (2000). *Mecanica de medios continuos para ingenieros*. (Edicions d). Edugraf S.L.

Omaki, S. (1982). “Stress-strain behaviour of anisotropically, normally consolidated cohesive soil”. *Proc. 1st Int. Symp. Num. Geomech. Zurich* pp. 250-269.

Prat, P. (2006). *Ecuaciones Constitutivas elasticidad y plasticidad*, Barcelona, Universidad Politecnica de Catalunya, Vol 1, pp 40-42 .

W.J.M. Rankine, "On the stability of loose earth", *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. 147, pp. 9-27, (1857).

Roscoe, K. H. and Burland, J. B. (1968). “On the generalized stress-strain behaviour of wet clay”. *Engineering plasticity*, J. Hetman nad F. A. Leckie (Eds.), London, Cambridge University Press, pp. 535-609. Roscoe, K., & Schofield, A. (1963). *Mechanical behaviour of an idealised 'wet' clay*. *Proc. 2nd Eur. Conf. SMFE*, Vol 1, págs. 47-54. Wiesbaden.

Roscoe, K., Schofield, A., & Wroth, C. (1958). *On the yielding of soils*. *Géotechnique*, Vol 8., 22-52.

Schofield, A., & Wroth, C. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. London: McGraw-Hill.

Spencer, A. (1980). *Continuum Mechanics*. U.S.A: Dover Publications.

Toll, D.G. (1990). *A framework for unsaturated soil behaviour*. *Géotechnique* 40, No.1, 31-44.

Wood, D. M. (1990). *Soil Behavior And Critical State Soil mechanics.pdf*. University of Cambridge.

Wheler, S.J. and Sivakumar, V. (1995). *An elasto- plastic critical state framework for unsaturated soils* *Geotechnique* 45, N°1, 35-53.

O.C. Zienkiewicz y D.J. Naylor, "Finite element studies of soils and porous media", *Lectures on finite elements in continuum mechanics*, Ed. Oden, J.T. and de Arantes, E.R., UAH Press, pp. 459-493, (1973)

APÉNDICE A

Se presenta el desarrollo de la formulación del modelo Cam-Clay Modificado para el caso drenado y no drenado en base a los conceptos de formulación presentada en el artículo (Roscoe & Burland, 1968) y los conceptos de modelación presentados por (Alonso et al., 1990).

FORMULACIÓN CAM-CLAY MODIFICADO DRENADO.

Las ecuaciones generales necesarias para la implementación del modelo son:

$$- \text{Función de fluencia: } F = q^2 - M^2 \cdot p \cdot (p_0^* - p) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$- \text{Ley de endurecimiento: } dp_0^* = p_0^* \cdot \frac{(1+e)}{(\lambda-\kappa)} d\varepsilon_p^p \quad (\text{A.2})$$

$$- \text{Ecuación de consistencia: } dF = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial F}{\partial p_0^*} \cdot dp_0^* \quad (\text{A.3})$$

$$- \text{Ley elástica: } d\sigma_i = D_{ij}^e \cdot d\varepsilon_j^e \quad (\text{A.4})$$

$$- \text{Ley de flujo: } d\varepsilon_p^p = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot d\lambda ; d\varepsilon_q^p = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot d\lambda \quad (\text{A.5})$$

$$- \text{Ley de compatibilidad: } d\varepsilon_i = d\varepsilon_i^e + d\varepsilon_i^p \quad (\text{A.6})$$

En base a la ecuación de consistencia (A.4):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial F}{\partial p_0^*} \cdot dp_0^*$$

Reemplazamos (A.5) en (A.2):

$$dp_0^* = p_0^* \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \frac{\partial F}{\partial p} \cdot d\lambda$$

Derivamos la ecuación de la tensión principal p y la ecuación de la tensión desviadora q :

$$dp = \frac{d\sigma_1 + 2 \cdot d\sigma_3}{3}$$

$$dq = d\sigma_1 - d\sigma_3$$

Derivamos parcialmente con respecto a p , q y p_0^* , obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = (2p - p_0^*) \cdot M^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 2q \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_0^*} = M^2 \cdot p \quad (\text{A.9})$$

Asimismo, de la ley de endurecimiento despejamos $\frac{dp_0^*}{d\varepsilon_p^p}$ y juntamente con las ecuaciones (A.1)(A.7), (A.8) y (A.9) reemplazamos en la ecuación (A.3) y despejamos $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot dq}{-\frac{\partial F}{\partial p_0^*} \cdot \frac{dp_0^*}{d\varepsilon_p^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}}$$

Donde denominaremos H, al potencial plástico:

$$H = -\frac{\partial F}{\partial p_0^*} \cdot \frac{dp_0^*}{d\varepsilon_p^p} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$d\lambda = \frac{2q dq - (p_0^* - 2p) \cdot M^2 dp}{M^2 \cdot p \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot (2p - p_0^*) \cdot M^2} \quad (A.10)$$

Determinamos la expresión para las deformaciones plásticas tanto de corte como volumétricas, para ello reemplazamos las ecuaciones (A.10), (A.7) y (A.8) en las expresiones de la ley de flujo obteniendo:

$$d\varepsilon_p^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$d\varepsilon_p^p = (2p - p_0^*) \cdot M^2 \cdot \frac{2q dq - (p_0^* - 2p) \cdot M^2 dp}{M^2 \cdot p \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot (2p - p_0^*) \cdot M^2} \quad (A.11)$$

$$d\varepsilon_q^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial q}$$

$$d\varepsilon_q^p = 2 \cdot q \cdot \frac{2q dq - (p_0^* - 2p) \cdot M^2 dp}{M^2 \cdot p \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot (2p - p_0^*) \cdot M^2} \quad (A.12)$$

Para determinar la matriz elástica del modelo, partimos de las ecuaciones fundamentales vistas en el informe 01:

$$\varepsilon_3^e = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_1^e = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3]$$

Estando en el régimen elástico $\varepsilon_3^e = \varepsilon_3$ y $\varepsilon_1^e = \varepsilon_1$

Las deformaciones volumétricas y de corte estarán dadas por las expresiones:

Deformación volumétrica

$$\varepsilon_p^e = 2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_1$$

Deformación de corte

$$\varepsilon_q^e = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

Iniciamos con la expresión de la deformación volumétrica:

$$\varepsilon_p^e = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \right\} + \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3]$$

$$\varepsilon_p^e = \frac{1}{E} [2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_1 + \sigma_1 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3]$$

$$\varepsilon_p^e = \frac{3}{E} [2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_3 - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_1]$$

$$\varepsilon_p^e = \frac{3}{E} \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \frac{(\sigma_1 + 2 \cdot \sigma_3)}{3} \right]$$

$$\varepsilon_p^e = \frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot p}{E}$$

$$\varepsilon_p^e = \frac{1}{K} \cdot p$$

Una segunda expresión para K es $K = \frac{1+\nu}{\kappa} \cdot p$

Realizamos la misma operación para las deformaciones de corte:

$$\varepsilon_q^e = \frac{2}{3E} (\sigma_1 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_3 - \sigma_3 - \nu \cdot \sigma_3 - \nu \cdot \sigma_1)$$

$$\varepsilon_q^e = \frac{2}{3E} ((1 + \nu) \cdot \sigma_1 - (1 + \nu) \cdot \sigma_3)$$

$$\varepsilon_q^e = \frac{2}{3E} (1 + \nu) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\varepsilon_q^e = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{3E} \cdot q$$

$$\varepsilon_q^e = \frac{1}{3G} \cdot q$$

Donde

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \text{ó} \quad G = \frac{3 \cdot (1 - 2\nu) \cdot (1 + \nu) \cdot p}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \kappa}$$

Finalmente obtenemos la expresión matricial para la ley elástica en términos del módulo de corte G y el módulo de elástico volumétrico K tenemos:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p^e \\ d\varepsilon_q^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Se aprecia de la ecuación matricial elástica corresponde a una matriz simétrica, así como la ausencia de relación entre los efectos distorsionales y volumétricos.

La ecuación de consistencia (A.1), también puede ser expresada como:

$$q^2 - M^2 \cdot p \cdot (p_0^* - p) = 0$$

$$\frac{q^2}{p^2} - M^2 \left(\frac{p_0^*}{p} - 1 \right) = 0$$

Realizamos un cambio de variable introduciendo una relación “ η ” que será igual a $\eta = \frac{p}{q}$, reemplazando en la expresión anterior tenemos:

$$\eta^2 - M^2 \left(\frac{p_0^*}{p} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{p}{p_0^*} = \frac{M^2}{\eta^2 + M^2}$$

A través de artificios encontraremos una relación “ $2 \cdot p - p_0^*$ ” que nos servirá para cálculos siguientes:

$$2 \cdot p - p_0^* = p \cdot \left(2 - \frac{p_0^*}{p} \right)$$

$$2 \cdot p - p_0^* = p \cdot \left(2 - \frac{\eta^2 + M^2}{M^2} \right)$$

$$2 \cdot p - p_0^* = p \cdot \left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

DEFORMACIÓN PLÁSTICA

En base a las expresiones encontradas es posible expresar la ecuación $d\lambda$ (A.10) en función de la variable η , en consecuencia podemos realizar los siguientes cálculos:

$$d\lambda = \frac{2q dq - (p_0^* - 2p) \cdot M^2 dp}{M^2 \cdot p \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot (2p - p_0^*) \cdot M^2}$$

$$d\lambda = \frac{2q dq + p \cdot \left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2} \right) \cdot M^2 dp}{M^2 \cdot p \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot \left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2} \right) \cdot M^2}$$

$$d\lambda = \frac{2 \frac{q}{p} dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)}$$

$$d\lambda = \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \quad (\text{A.15})$$

La nueva expresión de $d\lambda$ (A.15) en función de η se reemplaza en las ecuaciones de la ley de flujo (A.5):

Para las deformaciones plásticas volumétricas $d\varepsilon_p^p = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot d\lambda$; (A.15) y (A.7) en (A.5)

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_p^p &= (2p - p_0^*) \cdot M^2 \cdot d\lambda \\
 d\varepsilon_p^p &= (2p - p_0^*) \cdot M^2 \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_p^p &= p \cdot \left(\frac{M^2 - \eta^2}{M^2} \right) \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{\frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_p^p &= \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot \frac{p_0^*}{p} \cdot p} \\
 d\varepsilon_p^p &= \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot \frac{\eta^2 + M^2}{M^2} \cdot p} \\
 d\varepsilon_p^p &= \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{\frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p} \\
 d\varepsilon_p^p &= \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} [(M^2 - \eta^2) \cdot dp + 2 \cdot \eta \cdot dq] \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

Para las deformaciones plásticas de corte $d\varepsilon_q^p = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot d\lambda$; (A.15) y (A.8) en (A.5)

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_q^p &= 2 \cdot q \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot p_0^* \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_q^p &= 2 \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot \frac{p_0^*}{p} \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_q^p &= 2 \cdot \eta \cdot \frac{2 \cdot \eta \cdot dq + (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{M^2 \cdot \frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot \frac{\eta^2 + M^2}{M^2} \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_q^p &= \frac{4 \cdot \eta^2 \cdot dq + 2 \cdot \eta \cdot (M^2 - \eta^2) \cdot dp}{\frac{(1+e)}{\lambda - \kappa} \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p \cdot (M^2 - \eta^2)} \\
 d\varepsilon_q^p &= \frac{\lambda - \kappa}{(1+e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p} \left[2 \cdot \eta \cdot dp + \frac{4 \cdot \eta^2}{M^2 - \eta^2} \cdot dq \right] \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones (A.16) y (A.17) que se encuentran en función de dp y dq podemos encontrar una expresión matricial igual a:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p^p \\ d\varepsilon_q^p \end{bmatrix} = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p} \begin{bmatrix} (M^2 - \eta^2) & 2 \cdot \eta \\ 2 \cdot \eta & \frac{4 \cdot \eta^2}{M^2 - \eta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (A.18)$$

De acuerdo a la ecuación de compatibilidad (A.6) encontraremos dos expresiones tanto para las deformaciones totales tanto volumétricas y de corte.

Para las deformaciones volumétricas $d\varepsilon_p = d\varepsilon_p^e + d\varepsilon_p^p$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_p &= \frac{1}{K} \cdot p + \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} [(M^2 - \eta^2) \cdot dp + 2 \cdot \eta \cdot dq] \\ d\varepsilon_p &= \frac{1}{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} \left[\frac{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}{K \cdot (\lambda - \kappa)} \cdot dp + (M^2 - \eta^2) \cdot dp + 2 \cdot \eta \cdot dq \right] \\ d\varepsilon_p &= \frac{1}{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} \left[\left(\frac{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}{K} + (\lambda - \kappa) \cdot (M^2 - \eta^2) \right) \cdot dp + 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) \cdot dq \right] \end{aligned} \quad (A.19)$$

Para las deformaciones de corte $d\varepsilon_q = d\varepsilon_q^e + d\varepsilon_q^p$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_q &= \frac{1}{3G} \cdot dq + \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p} \left[2 \cdot \eta \cdot dp + \frac{4 \cdot \eta^2}{M^2 - \eta^2} \cdot dq \right] \\ d\varepsilon_q &= \frac{1}{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} \left[\left(\frac{(1 + e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p}{3G} + \frac{4 \cdot \eta^2 \cdot (\lambda - \kappa)}{M^2 - \eta^2} \right) dq \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) \cdot dp \right] \end{aligned} \quad (A.20)$$

Las ecuaciones (A.19) y (A.20) las expresamos de forma matricial en función a dp , dq :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} \begin{bmatrix} \frac{(1 + e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}{K} + (\lambda - \kappa) \cdot (M^2 - \eta^2) & 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) \\ 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) & \frac{(1 + e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p}{3G} + \frac{4 \cdot \eta^2 \cdot (\lambda - \kappa)}{M^2 - \eta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (A.21)$$

Realizamos un artificio para obtener las ecuaciones de $d\varepsilon_3$ y $d\sigma_1$ en función a la deformación impuesta $d\varepsilon_1$. En la cual igualamos la matriz principal de la ecuación (A.21) en función a Variables A, B y C.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \quad (A.22)$$

Siendo:

$$A = \frac{\frac{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}{K} + (\lambda - \kappa) \cdot (M^2 - \eta^2)}{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}$$

$$B = \frac{2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa)}{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}$$

$$C = \frac{\frac{(1+e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p}{3G} + \frac{4 \cdot \eta^2 \cdot (\lambda - \kappa)}{M^2 - \eta^2}}{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}$$

Reemplazamos las expresiones de la deformación de corte, volumétrica, así como la derivada de la tensión principal y de corte en la ecuación matricial (A.22):

$$d\varepsilon_p = d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 \quad ; \quad d\varepsilon_q = \frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \quad ; \quad dp = \frac{(d\sigma_1 + 2 \cdot d\sigma_3)}{3} \quad ; \quad dq = d\sigma_1 - d\sigma_3$$

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 \\ \frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(d\sigma_1 + 2 \cdot d\sigma_3)}{3} \\ d\sigma_1 - d\sigma_3 \end{bmatrix}$$

La primera expresión la obtendremos:

$$d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 = A \cdot \frac{(d\sigma_1 + 2 \cdot d\sigma_3)}{3} + B \cdot (d\sigma_1 - d\sigma_3)$$

$$d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 = \left(\frac{A}{3} + B\right) \cdot d\sigma_1 + \left(\frac{2A}{3} - B\right) d\sigma_3$$

$$d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 = \left(\frac{A + 3B}{3}\right) \cdot d\sigma_1 + \left(\frac{2A - 3B}{3}\right) d\sigma_3 \quad (A.23)$$

De igual forma:

$$\frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) = B \cdot \frac{(d\sigma_1 + 2 \cdot d\sigma_3)}{3} + C \cdot (d\sigma_1 - d\sigma_3)$$

$$\frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) = \left(\frac{B}{3} + C\right) d\sigma_1 + \left(\frac{2B}{3} - C\right) d\sigma_3$$

$$2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) = (B + 3C)d\sigma_1 + (2B - 3C)d\sigma_3$$

$$d\sigma_1 = \frac{2}{B + 3C} \cdot d\varepsilon_1 - \frac{2}{B + 3C} d\varepsilon_3 - \left(\frac{2B - 3C}{B + 3C}\right) d\sigma_3 \quad (A.24)$$

Hallamos $d\varepsilon_3$ en función a $d\varepsilon_1$ y $d\sigma_3$ (A.24) en (A.23):

$$d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_3 = \left(\frac{A + 3B}{3}\right) \cdot \left[\frac{2}{B + 3C} \cdot d\varepsilon_1 - \frac{2}{B + 3C} d\varepsilon_3 - \left(\frac{2B - 3C}{B + 3C}\right) d\sigma_3 \right] + \left(\frac{2A - 3B}{3}\right) d\sigma_3$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{3B + 9C - 2A - 6B}{3B + 9C} \right) d\varepsilon_1 + \left(\frac{2A + 12B + 18C}{3B + 9C} \right) d\varepsilon_3 \\
 & = \left(\frac{2A - 3B}{3} - \frac{(A + 3B)(2B - 3C)}{3B - 9C} \right) d\sigma_3 \\
 d\varepsilon_3 & = - \left(\frac{9C - 2A - 3B}{2A + 12B + 18C} \right) d\varepsilon_1 + \left(\frac{(2A - 3B)(3B - 9C) - (A + 3B)(2B - 3C)}{2A + 12B + 18C} \right) d\sigma_3 \\
 d\varepsilon_3 & = \left(\frac{2A + 3B - 9C}{2A + 12B + 18C} \right) d\varepsilon_1 + \left(\frac{9AC - 9B^2}{2A + 12B + 18C} \right) d\sigma_3 \quad (A.25)
 \end{aligned}$$

Hallamos $d\sigma_1$ en función a $d\varepsilon_1$ y $d\sigma_3$

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3 & = \left(\frac{B + 3C}{2} \right) d\sigma_1 + \left(\frac{2B - 3C}{2} \right) d\sigma_3 \\
 d\varepsilon_3 & = d\varepsilon_1 - \left(\frac{B + 3C}{2} \right) d\sigma_1 - \left(\frac{2B - 3C}{2} \right) d\sigma_3 \\
 d\varepsilon_1 + 2 \cdot \left[d\varepsilon_1 - \left(\frac{B + 3C}{2} \right) d\sigma_1 - \left(\frac{2B - 3C}{2} \right) d\sigma_3 \right] & = \left(\frac{A + 3B}{3} \right) \cdot d\sigma_1 + \left(\frac{2A - 3B}{3} \right) d\sigma_3 \\
 d\varepsilon_1 + 2 \cdot d\varepsilon_1 - (B + 3C)d\sigma_1 - (2B - 3C)d\sigma_3 & = \left(\frac{A + 3B}{3} \right) \cdot d\sigma_1 + \left(\frac{2A - 3B}{3} \right) d\sigma_3 \\
 3 \cdot d\varepsilon_1 & = \left(\frac{A + 3B + 3B + 9C}{3} \right) \cdot d\sigma_1 + \left(\frac{2A + 3B - 9C}{3} \right) d\sigma_3 \\
 d\sigma_1 & = \left(\frac{9}{A + 3B + 3B + 9C} \right) \cdot d\varepsilon_1 - \left(\frac{2A + 3B - 9C}{A + 3B + 3B + 9C} \right) \cdot d\sigma_3 \quad (A.26)
 \end{aligned}$$

Resumiendo, la ecuación constitutiva en condición drenada resulta ser:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_3 \\ d\sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2A + 3B - 9C}{2A + 12B + 18C} \right) & \left(\frac{9AC - 9B^2}{2A + 12B + 18C} \right) \\ \left(\frac{9}{A + 3B + 3B + 9C} \right) & - \left(\frac{2A + 3B - 9C}{A + 3B + 3B + 9C} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (A.27)$$

FORMULACIÓN CAM-CLAY MODIFICADO NO DRENADO.

En ensayos triaxiales no drenados, la deformación volumétrica resulta ser nula, en definitiva, no existe cambio volumétrico de la muestra de suelo, dicho esto las condiciones para la implementación del modelo Cam-Clay en condiciones no drenadas son:

$$d\varepsilon_p = 2 \cdot d\varepsilon_3 + d\varepsilon_1 = 0 \text{ y por consiguiente } d\varepsilon_1 = -2 \cdot d\varepsilon_3 ; d\varepsilon_3 = -\frac{d\varepsilon_1}{2}$$

En régimen elástico:

De la formulación en condiciones drenadas, las deformaciones elásticas tienen la siguiente formulación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 2\nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 2\nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ -\frac{d\varepsilon_3}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu \\ \nu & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11}^e & D_{13}^e \\ D_{31}^e & D_{33}^e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En régimen elastoplástico, de la formulación realizada en condiciones drenadas, tenemos la siguiente expresión en términos de dp , dq , $d\varepsilon_p$, $d\varepsilon_q$ que corresponde a la ecuación (A.21):

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p} \begin{bmatrix} \frac{(1+e)(\eta^2 + M^2) \cdot p}{K} + (\lambda - \kappa) \cdot (M^2 - \eta^2) & 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) \\ 2 \cdot \eta \cdot (\lambda - \kappa) & \frac{(1+e) \cdot (\eta^2 + M^2) \cdot p}{3G} + \frac{4 \cdot \eta^2 \cdot (\lambda - \kappa)}{M^2 - \eta^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix}$$

De igual forma, realizamos un artificio para determinar $d\sigma_1$ y $d\sigma_3$ en función a $d\varepsilon_1$ impuesta en el modelo Cam-Clay para ello igualamos la matriz principal de la ecuación matricial (A.21) en función a Variables A, B y C.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix}$$

Asimismo, tenemos las siguientes expresiones:

$$d\varepsilon_q = \frac{2}{3} \cdot (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) ; \quad d\varepsilon_p = 0$$

Formulamos las ecuaciones, a partir de la ecuación matricial anterior:

Para las deformaciones volumétricas $d\varepsilon_p = A \cdot dp + B \cdot dq$

$$0 = A \cdot dp + B \cdot dq$$

$$A \cdot \left(\frac{d\sigma_1 + 2d\sigma_3}{3} \right) = -B \cdot (d\sigma_1 - d\sigma_3)$$

$$\left(\frac{A}{3} + B \right) \cdot d\sigma_1 = \left(B - \frac{2 \cdot A}{3} \right) \cdot d\sigma_3$$

$$d\sigma_3 = \left(\frac{A + 3B}{3B - 2A} \right) d\sigma_1 \quad (A.28)$$

Para las deformaciones de corte

$$d\varepsilon_q = C \cdot dp + D \cdot dq$$

$$\frac{2}{3} \cdot (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) = C \cdot dp + D \cdot dq$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left[d\varepsilon_1 - \left(-\frac{d\varepsilon_1}{2} \right) \right] = C \cdot \left(\frac{d\sigma_1 + 2d\sigma_3}{3} \right) + D \cdot (d\sigma_1 - d\sigma_3)$$

$$d\varepsilon_1 = \left(\frac{C}{3} + D \right) d\sigma_1 + \left(\frac{2C}{3} - D \right) d\sigma_3$$

$$d\varepsilon_1 = \left(\frac{C}{3} + D \right) d\sigma_1 + \left(\frac{2C}{3} - D \right) \left(\frac{A + 3B}{3B - 2A} \right) d\sigma_1$$

$$d\varepsilon_1 = \left[\frac{C}{3} + D + \left(\frac{2C}{3} - D \right) \left(\frac{A + 3B}{3B - 2A} \right) \right] d\sigma_1$$

Finalmente la ecuación en términos de $d\varepsilon_1$ es:

$$d\sigma_1 = \frac{d\varepsilon_1}{\frac{C}{3} + D + \left(\frac{2C}{3} - D \right) \left(\frac{A + 3B}{3B - 2A} \right)} \quad (A.29)$$

APÉNDICE B

Se presenta el desarrollo de la formulación del Barcelona Basic Model para tensiones generalizadas en base a los conceptos de formulación presentados por (Alonso et al., 1990).

FORMULACIÓN TENSIONES GENERALIZADAS.

Superficie de fluencia.

$$F = q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) = 0 \quad (B.1)$$

Dividiendo entre $M^2(p + p_s)^2$:

$$F = \frac{q^2}{M^2(p+p_s)^2} - \frac{(p_0-p)}{(p+p_s)} \quad (B.2)$$

En términos de tensiones generalizadas:

$$F(p, J, \theta, s, p_0^*) = \frac{J^2}{g^2(\theta)(p + p_s)^2} - \frac{(p_0 - p)}{(p + p_s)} = 0 \quad (B.3)$$

Llamamos t^2 el término de la izquierda donde:

$$F(p, J, \theta, s, p_0^*) = t^2 - \frac{(p_0 - p)}{(p + p_s)} = 0 \quad (B.4)$$

Regla de flujo:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (B.5)$$

donde $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial p} * \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J} * \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} * \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \quad (B.6)$$

Las derivadas de la ecuación (B.6):

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial p}$

La derivada de t^2 respecto a p :

$$\frac{dt^2}{dp} = \left(\frac{J^2}{g^2(\theta)(p+p_s)^2} \right)' = \frac{J^2}{g^2(\theta)} * -\frac{2}{(p+p_s)^2} \quad (B.7)$$

$$\frac{dt^2}{dp} = \left(\frac{J^2}{g^2(\theta)(p+p_s)^2(p+p_s)} \right)' = -\frac{2}{(p+p_s)} \quad (B.8)$$

La derivada de $-\frac{(p_0-p)}{(p+p_s)}$ respectó a p :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = \left(\frac{(-1)*(p+p_s)-(1)*(p_0-p)}{(p+p_s)^2} \right)' \quad (B.9)$$

donde α es $-\frac{(p_0-p)}{(p+p_s)}$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = \left(\frac{(-p)*(-p_s)-(p_0)+p}{(p+p_s)^2} \right)' = \frac{(p_s-p_0)}{(p+p_s)^2} \quad (B.10)$$

Sumamos la ecuación B.8 y B.10 y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{dt^2}{dp} + \frac{\partial \alpha}{dp} \quad (B.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -\frac{2t^2}{(p+p_s)} + \frac{(p_s-p_0)}{(p+p_s)^2} \quad (B.12)$$

Calculo del termino $\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right)^T \quad (B.13)$$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial J}$

$$\frac{\partial F}{\partial J} = \frac{2J}{g^2(\theta)(p+p_s)^2} = \frac{2t^2}{J} \quad (B.14)$$

Calculo del termino $\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}}$

Tenemos la expresión J^2 :

$$J^2 = \frac{1}{6} * \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 \right] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (B.15)$$

Derivado respecto a σ_{ij} tenemos:

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{6} * [2(\sigma_x - \sigma_y) + 2(\sigma_x - \sigma_z)] = \frac{1}{6} * [2(\sigma_x - \sigma_y + \sigma_x - \sigma_z)] = \frac{1}{3} * [2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z] \quad (B.16)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{22}} = \frac{1}{6} * [-2(\sigma_x - \sigma_y) - 2(\sigma_y - \sigma_z)] = \frac{1}{6} * [-2(\sigma_x - \sigma_y - \sigma_y - \sigma_z)] = \frac{1}{3} * [2\sigma_y + \sigma_x + \sigma_z] \quad (B.17)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{33}} = \frac{1}{6} * [-2(\sigma_x - \sigma_z) - 2(\sigma_y - \sigma_z)] = \frac{1}{6} * [-2\sigma_x + 2\sigma_z - 2\sigma_y + 2\sigma_z] = \frac{1}{3} * [2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y] \quad (B.18)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{12}} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{21}} = 2\tau_{xy} \quad (B.19)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{13}} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{31}} = 2\tau_{xz} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{23}} = \frac{\partial J}{\partial \sigma_{32}} = 2\tau_{yz} \quad (\text{B.21})$$

$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}}$ de forma vectorial:

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) - u_a \\ \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) - u_a \\ \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) - u_a \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Donde el tensor S_{ij} :

$$s_{ij} = \sigma_{ij}^* - p\delta_{ij} \quad (\text{B.23})$$

y

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - u_a\delta_{ij} \quad (\text{B.24})$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} s_{11} = s_x = \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= \sigma_x - u_a - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) - u_a \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$s_{22} = s_y = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) - u_a \quad (\text{B.26})$$

$$s_{33} = s_z = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) - u_a \quad (\text{B.27})$$

La derivada de $\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}}$ queda :

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2J} (s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz})^T \quad (\text{B.28})$$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial g} * g'(\theta) = -\frac{2t^2}{g(\theta) * g'(\theta)} \quad (\text{B.29})$$

Donde la expresión $g(\theta)$ representa el criterio de falla adoptado descrito por Mohr-Coulomb que es :

$$g(\theta) = \frac{\sin\varphi}{\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi} \quad (\text{B.30})$$

La derivada de g tenemos:

$$g'(\theta) = \frac{\sin\varphi(\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\sin\varphi)}{(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi)^2} \quad (\text{B.31})$$

Reemplazando B.30 Y B.31 en B.29

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = - \frac{2t^2}{\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi} \right) * \left(\frac{\sin\varphi(\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\sin\varphi)}{(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi)^2} \right)} \quad (\text{B.32})$$

Calculo del termino $\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T}{-2 * \cos(3\theta) * J^3} + \frac{3\sqrt{3}}{2J^5} \frac{\det s_{ij}}{2 * \cos(3\theta)} (s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{xz}, 2\tau_{yz})^T \quad (\text{B.33})$$

Donde

$$X_1 = \frac{1}{3} [2s_y s_z - s_x s_z - s_x s_y - (2\tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2)] \quad (\text{B.34})$$

$$X_2 = \frac{1}{3} [2s_x s_z - s_y s_z - s_x s_y - (2\tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2)] \quad (\text{B.35})$$

$$X_3 = \frac{1}{3} [2s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z - (2\tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)] \quad (\text{B.36})$$

$$X_4 = 2(\tau_{xy} * \tau_{xz} - \tau_{xy} * s_x) \quad (\text{B.37})$$

$$X_5 = 2(\tau_{xy} * \tau_{yz} - \tau_{xz} * s_y) \quad (\text{B.38})$$

$$X_6 = 2(\tau_{xy} * \tau_{xz} - \tau_{yz} * s_z) \quad (B.39)$$

Con las ecuaciones B.12, B.13, B.14, B.22, B.32, B.33 reemplazamos en B.5 se calcula la regla de flujo.

Condición de consistencia

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial s} ds + \frac{\partial F}{\partial p_0^*} \frac{\partial p_0^*}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p = 0 \quad (B.40)$$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial s}$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial s} \quad (B.41)$$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial p_s}$

Derivando F respecto a p_s .

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_s} &= \frac{J^2}{g^2(\theta)} \frac{\partial \left(\frac{1}{(p + p_s)^2} \right)}{\partial p_s} - \frac{\partial \left(\frac{(p_0 - p)}{(p + p_s)} \right)}{\partial p_s} \\ \frac{\partial F}{\partial p_s} &= \frac{J^2}{g^2(\theta)} \frac{-2(p + p_s)}{(p + p_s)^4} - \frac{(-1 * (p_0 - p))}{(p + p_s)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial p_s} &= \frac{-2t^2}{(p + p_s)} + \frac{(p_0 - p)}{(p + p_s)^2} \end{aligned}$$

Entonces

(B.42)

Calculo del termino $\frac{\partial p_s}{\partial s}$

$$p_s = k * s, \quad \frac{\partial p_s}{\partial s} = k \quad (B.43)$$

o se puede ajustar más al modelo con

$$p_s = \frac{s}{a + bs}, \quad \frac{\partial p_s}{\partial s} = \frac{a}{(a + bs)^2} \quad (B.44)$$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial p_0}$

$$\frac{\partial F}{\partial p_0} = \frac{-1}{(p+p_s)} \quad (\text{B.45})$$

Calculo del termino $\frac{\partial p_0}{\partial s}$

$$\frac{\partial \lambda(s)}{\partial s} = \lambda(0) * [-\beta(1-r) * \exp(-\beta s) = -\beta(1-r) * \exp(-\beta s)] \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = p_c * \left[\left(\frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\frac{\lambda(0)-K}{\lambda(s)-K}} - \ln \left(\frac{p_0^*}{p_c} \right) * \frac{-\beta(1-r) * \exp(-\beta s) * \lambda(0)-K}{(\lambda(s)-K)^2} \right] \quad (\text{B.47})$$

Las ecuaciones B42, B43, B45, B47 reemplazamos en B41 y obtenemos $\frac{\partial F}{\partial s}$

Calculo del termino $\frac{\partial F}{\partial p_0^*}$

$$\frac{\partial F}{\partial p_0^*} = \frac{\partial F}{\partial p_0} \frac{\partial p_0}{\partial p_0^*} \quad (\text{B.48})$$

Calculo del termino $\frac{\partial p_0}{\partial p_0^*}$

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_0^*} = \left(\frac{\lambda(0) - K}{\lambda(s) - K} \right) * p_c \left(\frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\left(\frac{\lambda(0)-\lambda(s)}{\lambda(s)-K} \right)} \quad (\text{B.49})$$

La ecuación B.45, B.49 en B.48 obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial p_0^*} = \left(\frac{-1}{(p+p_s)} \right) * \left[\left(\frac{\lambda(0) - K}{\lambda(s) - K} \right) * p_c \left(\frac{p_0^*}{p_c} \right)^{\left(\frac{\lambda(0)-\lambda(s)}{\lambda(s)-K} \right)} \right] \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{v}{\lambda(0) - K} * p_0^* \quad (\text{B.51})$$

Con las ecuaciones B.6, B.41, B.50, B.51 reemplazamos en B.40 se calcula condición de consistencia.

Por lo tanto, encontramos el **multiplicador plástico**.

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial s} ds}{\frac{\partial F}{\partial p_0^*} \frac{\partial p_0^*}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ii}}} \quad (\text{B.52})$$

ANEXO

%MODELO BASICO DE BARCELONA

```
PARAMETROS=xlsread('PARAMETROSBBM','Octavio_b0','C1:C17');
Poi=PARAMETROS (1);
LAMBDA_zero=PARAMETROS (3);
KAPPA_zero=PARAMETROS (4);
e_zero=PARAMETROS (5);
G=PARAMETROS (6);
Pc=PARAMETROS (7);
LAMBDA_S=PARAMETROS (8);
KAPPA_S=PARAMETROS (9);
r=PARAMETROS (10);
BETA=PARAMETROS (11);
k=PARAMETROS (12);
s_o=PARAMETROS (13);
Pat=PARAMETROS (14);
b=PARAMETROS (15);
phi_fr=29,7;
%
%TRAYECTORIAS CAMPAÑA EXPERIMENTAL CARDENA 2018 (p', q, s)
PUNTOS=xlsread('TRAYECTORIAS_BBM','TRAYECTORIA_OCTAVIO');
DIMENSION=size(PUNTOS);
Numpuntos=DIMENSION (1);
PUNTOS_p=PUNTOS(:,2);
PUNTOS_q=PUNTOS(:,3);
PUNTOS_s=PUNTOS(:,4);
%
LODE=atand((2*b-1)/sqrt(3))
MLODE=(sind(phi_fr)/((1/sqrt(3))*sind(LODE)*sind(phi_fr)))+(cosd(LODE))
)* (sqrt(3))
%
alpha=(MLODE*(MLODE-9)*(MLODE-3)/(9*(6-MLODE)))*(1/1-
(KAPPA_zero/LAMBDA_zero));
%
Po_sati=ones(1,Numpuntos)*Poi;
Po=zeros(1,Numpuntos);
S_o=zeros(1,Numpuntos)*s_o;
F_LAMBDA_s=zeros(1,Numpuntos);
Ps=zeros(1,Numpuntos);
e=zeros(1,Numpuntos);
v=zeros(1,Numpuntos);
%
S=linspace(0,0.5,Numpuntos);
Pol=zeros(1,Numpuntos);
L_s=zeros(1,Numpuntos);
L_s2=zeros(1,Numpuntos);
v_dev=zeros(1,Numpuntos);
Posat=zeros(1,Numpuntos);
Posat_c=zeros(1,Numpuntos);
%
delta_def_vol_elastica_p=zeros(1,Numpuntos-1);
delta_def_vol_elastica_s=zeros(1,Numpuntos-1);
delta_def_vol_elastica=zeros(1,Numpuntos-1);
def_vol_elastica=zeros(1,Numpuntos);
%
delta_def_vol_plastica_p=zeros(1,Numpuntos-1);
delta_def_vol_plastica_s=zeros(1,Numpuntos-1);
delta_def_vol_plastica=zeros(1,Numpuntos-1);
def_vol_plastica=zeros(1,Numpuntos);
```

```
%
delta_def_volumetrica=zeros(1,NUMPUNTOS-1);
def_volumetrica=zeros(1,NUMPUNTOS);

%
delta_def_corte_elastica=zeros(1,NUMPUNTOS-1);
delta_def_corte_plastica=zeros(1,NUMPUNTOS-1);
delta_def_corte=zeros(1,NUMPUNTOS);
def_corte=zeros(1,NUMPUNTOS);
incrementos_plasticos=zeros(1,NUMPUNTOS);

%

for n=1:NUMPUNTOS

    L_s(n)=LAMBDA_zero*((1-r)*exp(-BETA*S(n))+r);

    Pol(n)=Pc*((Po_sati(n)/Pc)^(LAMBDA_zero-KAPPA_zero)/(L_s(n)-
    KAPPA_zero));

%

F_LAMBDA_s(n)=LAMBDA_zero*((1-r)*exp(-BETA*PUNTOS_s(n))+r);
Ps(n)=k*PUNTOS_s(n);
Po(n)=max((Pc*((Po_sati(n)/Pc)^(LAMBDA_zero-
KAPPA_zero)/(F_LAMBDA_s(n)-
KAPPA_zero))))*((PUNTOS_q(n)^2)/((MLODE^2)*(PUNTOS_p(n)+Ps(n)))+PUNTOS
_p(n));
S_o(n)=max(s_o,max(PUNTOS_s(1:n)));

    if PUNTOS_s(n) > S_o(n)

        Posat(n)=max((Pc*((max(Po(1:n)/Pc)^(F_LAMBDA_s(n)-
KAPPA_zero)/(LAMBDA_zero-KAPPA_zero))))),... \n
        Posat(n-1)*exp(log((S_o(n)+Pc)/(S_o(n-1)+Pc))*((LAMBDA_S-
KAPPA_S)/(LAMBDA_zero-KAPPA_zero))));
    else
        Posat(n)=(Pc*((Po(n)/Pc)^(F_LAMBDA_s(n)-
KAPPA_zero)/(LAMBDA_zero-KAPPA_zero))));
    end

    Posat_c(n)=max(Posat(1:n));

end

%

for m=1:NUMPUNTOS-1

    delta_def_vol_elastica_p(m)=(KAPPA_zero/(1+e_zero))*log(PUNTOS_p(m+1)/
    PUNTOS_p(m));
    delta_def_vol_elastica_s(m)=(KAPPA_S/(1+e_zero))*log((PUNTOS_s(m+1)+Pa
    t)/(PUNTOS_s(m)+Pat));
    delta_def_vol_plastica_p(m)=((LAMBDA_zero-
    KAPPA_zero)/(1+e_zero))*log(Posat_c(m+1)/Posat_c(m));
    delta_def_vol_plastica_s(m)=((LAMBDA_S-
    KAPPA_S)/(1+e_zero))*log((S_o(m+1)+Pat)/(S_o(m)+Pat));
    delta_def_corte_elastica(m)=(PUNTOS_q(m+1)-PUNTOS_q(m))/(3*G);

    delta_def_corte_plastica(m)=(((delta_def_vol_plastica_p(m))*(2*(PUNTOS
    _q(m+1)*alpha)))/((MLODE^2)*(2*PUNTOS_p(m+1)+Ps(m+1)-Po(m+1)))));
```

```

delta_def_vol_elastica(m)=delta_def_vol_elastica_p(m)+delta_def_vol_elastica_s(m);

if round((delta_def_vol_plastica_p(m)-delta_def_vol_plastica_s(m)),6)==0

delta_def_vol_plastica(m)=((delta_def_vol_plastica_p(m)+delta_def_vol_plastica_s(m))/2);

else

delta_def_vol_plastica(m)=delta_def_vol_plastica_p(m)+delta_def_vol_plastica_s(m);

end

delta_def_volumetrica(m+1)=delta_def_vol_elastica(m)+delta_def_vol_plastica(m);

delta_def_corte(m+1)=delta_def_corte_elastica(m)+delta_def_corte_plastica(m);

end

%
for j=2:NUMPUNTOS

def_volumetrica(j)=delta_def_volumetrica(j)+def_volumetrica(j-1);

def_corte(j)=delta_def_corte(j)+def_corte(j-1);

incrementos_plasticos(j)=delta_def_volumetrica(j-1)/delta_def_corte(j-1);

end
%
for d=1:NUMPUNTOS

v_dev(d)=(def_volumetrica(d)*(1+e_zero));

e(d)=e_zero-v_dev(d);

v(d)=e(d)+1;
end
%
for k=1:NUMPUNTOS
L_s2(k)=LAMBDA_zero*((1-r)*exp(-BETA*S(k))+r);

Po2(k)=Pc*((max(Posat_c)/Pc)^((LAMBDA_zero-KAPPA_zero)/(L_s2(k)-KAPPA_zero)));

End

%figure(1)
%plot(Po1,S,PUNTOS_p,PUNTOS_s,Po2,S)
%title('Superficie de Fluencia Inicial, Final y Trayectoria')
%xlabel('p(Mpa)')
%ylabel('s(MPa)')

```

```
%figure(2)
%plot(PUNTOS_p,v,'-')
%title('Tensi?n media vs Volumen espec?fico')
%xlabel('p (MPa)')
%ylabel('v')
%axis([0.15 0.65 1.60 2])

%figure(3)
%plot(def_corte,PUNTOS_s,'k','LineWidth',1.5)
%xlabel('\epsilon_s')
%ylabel('s (MPa)')

%figure(4)
%plot(PUNTOS_s,v,'k','LineWidth',1.5)
%xlabel('s (MPa)')
%ylabel('v')

figure(5)
plot(PUNTOS_p,v,'k','LineWidth',1.5)
xlabel('p (MPa)')
ylabel('v')
axis([0 0.21 1 2])
grid on

%figure(6)
%plot3(PUNTOS_p,PUNTOS_q,PUNTOS_s,'-')
%title('p vs q')
%xlabel('p (MPa)')
%ylabel('q (MPa)')
%zlabel('s (MPa)')
%legend('Trayectoria ABCD')
%grid on

%figure (7)
%plot(def_corte,PUNTOS_q)
%xlabel('\epsilon_s')
%ylabel('q (MPa)')
%axis([0 0.1 0.0 0.2])

%figure(8)
%plot(PUNTOS_p,incrementos_plasticos)
%xlabel('p (MPa)')
%ylabel('\Delta\epsilon_q^p/\Delta\epsilon_v^p')

figure(9)
semilogx(PUNTOS_s,def_volumetrica)
xlabel('s')
ylabel('\epsilon_v')
axis([-0.5 11.5 -0.3 0.5])
grid on
%
figure(10)
plot(PUNTOS_p,PUNTOS_q)
xlabel('p')
ylabel('q')
axis([-0.1 0.3 0 0.3])
grid on
```